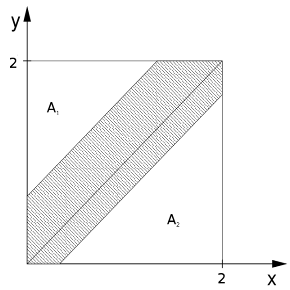
Disclaimer

Dieses Dokument ist ein Lösungsvorschlag für die Klausur
Mathematik C4 vom 12.10.2009.
Wir geben **KEINE** Garantie auf Richtigkeit der folgenden Lösungen.
Denkt daran, die Lösung wurde von Studenten erstellt, die bei der Klausur durchgerasselt sind. Wer sich auf die folgenden Lösungen verlässt und nicht selbstständig lernt, ist **selbst** schuld!

A1



$A_1 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^2$
$A_2 = \frac{1}{2}(\frac{11}{6})^2$
$p = |A| = \frac{A_1+A_2}{4} \approx 0,70$

A2

$f(x_1,x_2) = \begin{cases} ce^{-(2x_1+3x_2)} & , \textit{für} \quad x_1>0 \quad \textit{und} \quad x_2>x_1 \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases}$

gesucht: c

$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{x_1} ce^{-(2x_1+3x_2)} dx_2 dx_1 = 1$

$c \int\limits_0^\infty e^{-2x_1} \int\limits_0^{x_1} e^{-3x_2} dx_2 dx_1 = 1$

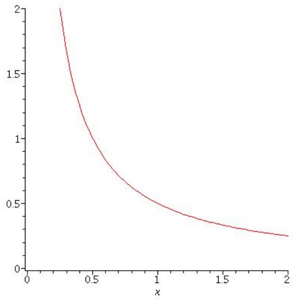
$-\frac{1}{3} c \int\limits_0^\infty e^{-5x_1} dx_1 = 1$

$\frac{1}{15} c[e^{-5x_1}]_0^\infty = 1$

$\frac{1}{15} c(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -15$

A3

gesucht: Wahrscheinlichkeit von $X_1X_2 \leqq \frac{1}{2}$



$X_1X_2 \leqq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad X_2 \leqq \frac{1}{2X_1}$

$\frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{1}{2X_1} dx_1) =$

$= \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + [\frac{1}{2} ln(x_1)]_{\frac{1}{4}}^{2}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} ln(2)$

A4

$Z_1 = X_1 - X_2 \qquad Z_2 = X_1$

$M = \{(x_1, x_2)|0 \leqq x_2 \leqq 2 \ \ und \ \ 0 \leqq x_1 \leqq x2\}$

gesucht: $cov(Z_1, Z_2)$

$cov(Z_1, Z_2) = cov(X_1 - X_2, X_1) = cov(X_1, X_1) - cov(X_2, X_1) =$

$= var(X_1) - cov(X_2, X_1) =$

$= (E(X_1^2) - E(X_1)^2) - (E(X_2X_1) - E(X_2)E(X_1))$

$A_M = 2 \quad \Rightarrow \quad Dichte_M = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad f(x_1, x_2) = \{ {}^{\frac{1}{2} \ , \ x_1x_2 \in M}_{0 \ , \ sonst}$

$f(x_1) = \int\limits_{x_1}^{2} \frac{1}{2} dx_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1$

$f(x_2) = \int\limits_{0}^{x_2} \frac{1}{2} dx_1 = \frac{1}{2}x_2$

$E(X_1) = \int\limits_{0}^{2} x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 dx_1 = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{6}x_1^3|_0^2 = \frac{2}{3}$

$E(X_1^2) = \int\limits_{0}^{2} x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 dx_1 = \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{8}x_1^4|_0^2 = \frac{2}{3}$

$E(X_2) = \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{2}x_2^2 dx_2 = \frac{1}{6}x_2^3|_0^2 = \frac{4}{3}$

$E(X_2X_1) = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{x_2} x_1x_2\frac{1}{2}dx_1dx_2 = \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{4}x_2^3 dx_2 = \frac{1}{16}x_2^4|_0^2 = 1$

$\rightarrow \quad cov(Z_1, Z_2) = (E(X_1^2) - E(X_1)^2) - (E(X_2X_1) - E(X_2)E(X_1)) =$
$(\frac{6}{9} - \frac{4}{9}) - (1 - \frac{8}{9}) = \frac{1}{9}$