Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Prof. Dr. W. Borchers
Dr. Estelle Marchand

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Mathematik für Ingenieure III C (Inf) — Blatt 0

Aufgabe P1 Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos x + \cos y \\ \cos(-y) + z \\ \cos x + y + \alpha z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

b) Berechnen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix.

c) Berechnen Sie, für welche $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ die Jacobi-Matrix invertierbar ist.

Aufgabe P2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 1 + \int_0^{2x} \exp(\sin t)\mathrm{d}t$.

a) Berechnen Sie die Taylor-Polynome T_1, T_2, T_3 erster, zweiter, dritter Ordnung von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Leiten Sie für das Taylor-Polynom T_2 eine Abschätzung des Restglides R_2 der Form

$$|R_2(x)| \leq c|x|^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

her (d.h. geben Sie eine geeignete Konstante c an).

Aufgabe P3 Bogenlänge

Ein bewegter Gegenstand im $\mathbb{R}^2$ befindet sich zum Zeitpunkt t am Ort $\begin{pmatrix} \cosh t \\ t \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit von t.

b) Bestimmen Sie die Länge des Weges, die der Körper vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = 1$ zurücklegt.

Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Prof. Dr. W. Borchers
Dr. Estelle Marchand

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Mathematik für Ingenieure III C (Inf) — Blatt 1

Aufgabe A1 Bogenlänge
Wir betrachten die parametrisierte Kurve $k : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^3$,

$$k(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ \frac{1}{3}(2t)^{3/2} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Länge des Bogens zwischen $t = 0$ und $t = t_1$, für irgend ein $t_1 \geq 0$.

b) Berechnen Sie nochmal das Bogenelement, indem Sie Zylinder Koordinaten betrachten, dass heißt benützen Sie dass ·

für

$$k(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

das Bogen Element durch

$$ds = \sqrt{r'^2(t) + r^2(t)\varphi'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

gegeben ist, also insbesondere

$$ds = \sqrt{r'^2(t) + r^2(t) + z'^2(t)}dt$$

für

$$k(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

(4+2 Punkte)

Aufgabe A2 Jacobi-Matrix
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos x \\ y\sin x \\ y+z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

b) Für welche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist sie invertierbar?

(2+2 Punkte)

Aufgabe A3 Gradient, Minimierungsproblem
Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die beiden Geraden

$$g(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$h(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei α, β, γ feste reelle Zahlen sind.
Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden, und zwar wie folgt: Bestimmen Sie die Lösung des Minimierungsproblems für

$$f(\lambda, \mu) := \|h(\mu) - g(\lambda)\|^2.$$

Überprüfen Sie, dass die Geraden sich schneiden, wenn $\alpha - 2\beta + \gamma = 0$.

(8 Punkte)

Aufgabe P4 Bogenlänge
Ein bewegter Gegenstand im $\mathbb{R}^3$ befindet sich zum Zeitpunkt t am Ort $\begin{pmatrix} t - \cos t \\ \sin t \\ \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit von t.

b) Bestimmen Sie die Länge des Weges, die der Körper vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = 1$ zurücklegt.

Aufgabe P5 Jacobi-Matrix
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos y \\ \exp(x)\sin y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

b) Für welche $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ist sie invertierbar?

Aufgabe P6 Gradient, Minimierungsproblem
Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Fläche

$$g(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 3+\cos\lambda \\ 3+\sin\lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

und die Gerade

$$h(\nu) = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Abstand der Fläche von der Geraden, und zwar wie folgt: Bestimmen Sie die Lösung des Minimierungsproblems für

$$f(\lambda,\mu,\nu) := \|h(\nu) - g(\lambda,\mu)\|^2.$$