Prof. Dr. Günther Greiner
Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung
der Universität Erlangen–Nürnberg

18. September 2006

Vordiplom
Algorithmik 3 — 18. September 2006

Angaben zur Person (Bitte in *DRUCKSCHRIFT* ausfüllen!):

Name, Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Studienfach: ....

Nicht von der Kandidatin bzw. vom Kandidaten auszufüllen !

Bewertung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max. Punktzahl	12	12	8	10	12	16	10	16	12	12
Erreichte Punkte										

Gesamtpunktzahl	
Note	

Organisatorische Hinweise

Die folgenden Hinweise bitte aufmerksam lesen und die Kenntnisnahme durch Unterschrift bestätigen!

- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Personenkontrolle bereit.
- Hilfsmittel (außer Schreibmaterial) sind nicht zugelassen. Alle elektronischen Geräte sind auszuschalten.
- Fragen zu den Prüfungsaufgaben werden grundsätzlich nicht beantwortet.
- Die Lösung einer Aufgabe muss auf das jeweilige Aufgabenblatt geschrieben werden (einschl. Rückseite). Sollte der Platz nicht reichen, so verwenden Sie die Zusatz-Seiten am Ende der Klausur. Fügen Sie einen Hinweis in Ihre Lösung ein, dass die Lösung auf den Zusatz-Seiten fortgesetzt wurde und beschriften Sie diese mit Namen und Aufgabennummer.
- Es können durch die Aufsicht zusätzlich Seiten eingeheftet werden, sollte mehr Platz benötigt werden. Bitte beschriften Sie den Kopf dieser Seiten mit ihrem Namen und der Aufgabennummer. Streichen Sie alles, was nicht bewertet werden soll doppelt aus.
- Auf Ihrem Platz befinden sich einige lose Blätter Schmierpapier. Bei Bedarf können Sie zusätzliches Schmierpapier von der Aufsicht anfordern. Das Schmierpapier muss abgegeben werden, es wird aber nicht bewertet.
- Wenn Sie die Prüfung aus gesundheitlichen Gründen abbrechen müssen, so muss Ihre Prüfungsunfähigkeit durch eine Untersuchung in der Universitätsklinik nachgewiesen werden. Melden Sie sich bei der Aufsicht und lassen Sie sich das entsprechende Formular aushändigen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten, es sind alle zehn Aufgaben mit 120 Punkten zu bearbeiten.
- Überprüfen Sie die Prüfungsaufgaben auf Vollständigkeit (20 Seiten inklusive Deckblatt) und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, auf dem Deckblatt die Angaben zur Person einzutragen und die Erklärungen auf dieser Seite zu unterschreiben.
- Viel Erfolg!

Erklärungen

Durch meine Unterschrift bestätige ich den Empfang der vollständigen Klausurunterlagen und die Kenntnisnahme der obigen Informationen.

Erlangen, 18. September 2006 ....
(Unterschrift)

Ich bin damit einverstanden, dass mein Prüfungsergebnis unter Angabe der Matrikelnummer anonymisiert veröffentlicht wird:

ja: ☐ nein: ☐

Erlangen, 18. September 2006 ....
(Unterschrift)

1 Komplexität (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Komplexität von der folgenden Operationen (unter Annahme der Länge von Vektoren als n und der Größe von Matrizen als $n \times n$):

Vektor-Matrix-Multiplikation	**O** ( )
Matrix-Matrix-Multiplikation	**O** ( )
LR-Zerlegung (vollbesetzte Matrix)	**O** ( )
LR-Zerlegung einer tridiagonalen Matrix	**O** ( )
Komplexität der kubischen Bspline-Interpolierenden (d. h. die Aufstellung der Koeffizienten)	**O** ( )
Komponentenweise Multiplikation zweier Vektoren der Länge n $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i)$	**O** ( )
Diskrete Faltung zweier Vektoren der Länge n $(f * g)(i) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g((i-k) \quad modulo \quad n)$ $0 \leq i \leq n-1$	**O** ( )
Fast Fourier Transformation	**O** ( )

b) Warum wird für große n die Faltung unter Verwendung der Fouriertransformation duchgeführt?

2 Faltung (12 Punkte)

a) Die Faltung zweier Funktionen ist gegeben durch

$$(f * g)(t) = \int f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Welche der folgenden Eigenschaften gilt für die Faltung?

☐ Assoziativ
☐ Distributiv
☐ Kommutativ

b) Was bewirkt die Faltung einer Funktion f mit einer Dirac-Funktion δ_a ($a \in \mathbb{R}$)?

c) Gegeben seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sowie ihre Fouriertransformierten $\tilde{f}(x)$ und $\tilde{g}(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(ax)}{x} \\
\tilde{f}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{\sigma^2 x^2}{2}) \\
\tilde{g}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f * g$ für $a = 1$ und $\sigma = 1$.

3 Zweidimensionale Filter (8 Punkte)

Was sind die Vorteile von separierbaren Filtern?
Geben Sie die Komplexität an und nennen Sie eine Methode, um separierbare Filter zu entwerfen.

Verwenden Sie für ihre Überlegungen 2D-Filter, dabei eine Bildgrösse $M \times M$ und eine Filtergrösse $m \times m$.

4 Dünn besetzte Matrizen (10 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Führen eine effizientere Speicherung der nachfolgenden Matrix durch, indem Sie das *compressed column storage*-Verfahren anwenden (Beginnen Sie die Indizierung von Spalten und Zeilen bei 1, d. h. der Matrixeintrag $A[1,2]$ hat den Wert -8):

values															
row index															
column pointer															

b) Betrachten Sie die beiden Speicherformate *compressed column storage* und *compressed row storage*. Welches Format ist geeigneter, um besonders effizient eine Matrix-Vektor-Multiplikation $A \cdot d$ durchzuführen?

5 Iterative Lösungsverfahren (12 Punkte)

a) Warum konvergiert das Jacobi- oder Gauss-Seidel-Verfahren für die folgende Matrix A?

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Führen Sie den ersten Iterationsschritt aus für das Jacobi- und das Gauss-Seidel-Verfahren (bei natürlicher Sortierung). Benutzen Sie dabei den Startvektor $x_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$.

6 Direkte Lösungsverfahren (16 Punkte)

a) Wie löst man das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ bei bekannter LR-Zerlegung von A? Wie löst man das gegebene System bei bekannter QR-Zerlegung?

b) Führen Sie eine LR-Zerlegung der folgenden Matrix A durch (ohne Pivotsuche):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Lösen Sie nun folgendes System: $Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.

7 Lineare und bilineare Interpolation (10 Punkte)

a) Geben Sie die Formel an für lineare Interpolation auf dem Intervall $[a, b]$ mit gegebenen Funktionswerten f_a und f_b (mit $f_a = f(a), f_b = f(b)$).

b) Gegeben sei das Rechteck $R : [-1, 3] \times [2, 5]$ und Funktionswerte an jedem Eckpunkt:
$f(-1, 5) = 1,\ f(-1, 2) = 0,\ f(3, 2) = 2$ und $f(3, 5) = 0$.

Berechnen Sie die Funktionswerte $f(P)$ und $f(Q)$ an den Stellen $P = (1, 3)$ und $Q = (2, 4)$ mittels bilinearer Interpolation.

8 Interpolation (16 Punkte)

Gegeben seien folgende Daten:

i	0	1	2	3
x_i	2	4	5	8
y_i	9	19	30	87

Berechnen Sie die interpolierende Funktion $f(x)$ auf dem Interval $I = [2, 8]$ und geben Sie sie an. Skizzieren Sie das Ergebnis.

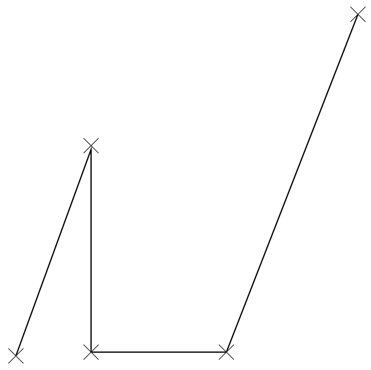
a) Nearest-Neighbor Interpolation

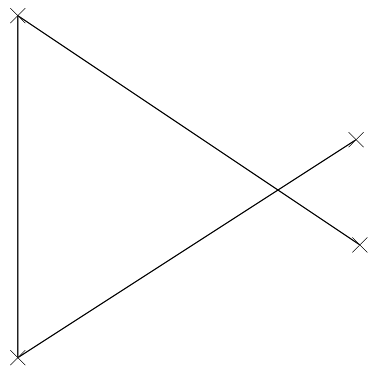
b) lineare Interpolation

c) Newton-Polynom Interpolation (Verwenden Sie den Algorithmus von Aitken-Neville).

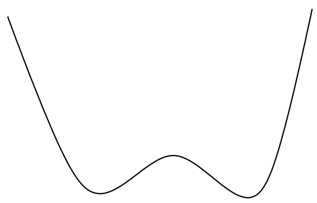
9 Bezierkurven (12 Punkte)

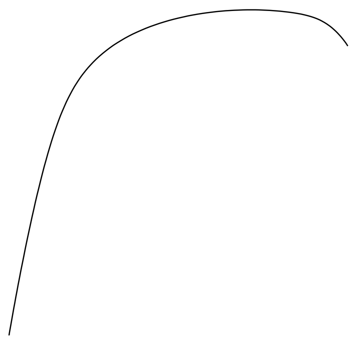
a) Skizzieren Sie zu den folgenden Kontrollpolygonen die zugehörigen Bézierkurven:



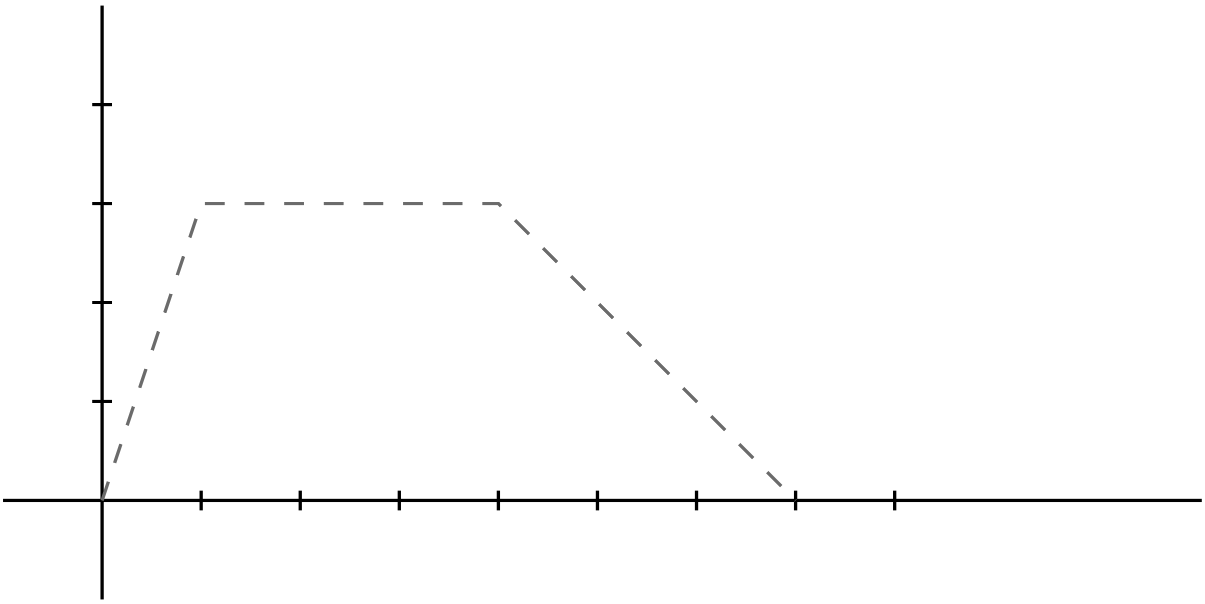


b) Skizzieren Sie zu den folgenden Bézierkurven vierten Grades die Kontrollpolygone:





c) Werten Sie die kubische Bezierkurve C an dem Parameter $t = \frac{2}{3}$ graphisch (siehe das vorgegebene Kontrollpolygon) mit dem de Casteljau-Algorithmus aus.



10 Numerische Integration (12 Punkte)

a) Geben Sie die Formeln für die Trapezregel und die aufsummierte Trapezregel auf dem Intervall $[a, b]$ an (Schrittweite $h = (b - a)/n$ bei $n + 1$ Stützstellen).

b) Gegeben seien die Fehlerabschätzungen der Trapezsumme

$$\int_a^b f(x)dx - \tau_{[a,b]}^h = \frac{h^2(b-a)f''(\xi)}{12} = O(h^2)$$

und der Simpsonsumme:

$$\int_a^b f(x)dx - \upsilon_{[a,b]}^h = \frac{h^4(b-a)f''''(\xi)}{180} = O(h^4)$$

Betrachte die Funktion $f(x) = \sin(2x)$ mit $0 \leq x \leq 2$. Berechnen Sie die Schrittweite h, für die der Fehler unter einer Schranke $\epsilon = 10^{-6}$ bleibt für jeweils die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel auf dem Intervall $[0, 2]$ an.