Aufgabensammlung zu Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Friedrich Graef

Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Dies ist eine Zusammenstellung der Aufgaben, die in den letzten Jahren in den Übungen zu den Vorlesungen *Wahrscheinlichkeitsrechnung 1 für Informatiker und Ingenieure* und *Einführung in die Stochastik für Elektrotechniker* und den entsprechenden Vordiplomsklausuren an der Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg gestellt wurden.

Die Aufgaben sind zwar grob nach Themengebieten sortiert, aber eine eindeutige Zuordnung ist nicht immer möglich, da vor allem bei Klausuraufgaben mehrere Teilfragen aus unterschiedlichen Bereichen gestellt werden.
Da diese Aufgabensammlung nicht als solche konzipiert wurde, sondern die Aufgabenstellungen mehr oder weniger wörtlich aus den Übungs- und Klausurblättern übernommen wurden, taucht gelegentlich die gleiche Fragestellung in unterschiedlichen Formulierungen mehrmals auf.
Zu den Aufgaben, die im ersten Kapitel mit **(L)** markiert sind, findet man im zweiten Kapitel Lösungsvorschläge. Diese Lösungsvorschläge nehmen nicht für sich in Anspruch, die jeweils eleganteste oder alleinseligmachende Lösung zu sein. Für ihre Richtigkeit gilt außerdem wie bei der Ziehung der Lottozahlen: **Ohne Gewähr**.

Friedrich Graef
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik II
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Martensstr. 3
91058 Erlangen
Email: Friedrich.Graef@am.uni-erlangen.de
WWW: http://www.am.uni-erlangen.de

1 Aufgaben

1.1 Ereignisse, Laplace-Experimente

Aufgabe 1: (L) A, B und C seien Ereignisse aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Stellen Sie die folgenden Ereignisse unter Verwendung von Mengenoperationen dar: wr001

(a) Nur A tritt ein.
(b) A und B, aber nicht C treten ein.
(c) Alle drei Ereignisse treten ein.
(d) Wenigstens eines der Ereignisse tritt ein.
(e) Wenigstens zwei der Ereignisse treten ein.
(f) Genau eines der Ereignisse tritt ein.
(g) Genau zwei der Ereignisse treten ein.
(h) Keines tritt ein.
(i) Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.

Aufgabe 2: (L) $\mathcal{A}$ sei die Menge der Teilmengen von natürlichen Zahlen, die entweder selbst endlich sind, oder deren Komplement endlich ist. wr002
Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra, aber keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3: Gibt es eine Mengenoperation $*$, so dass man eine Mengenalgebra als eine Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω mit den Eigenschaften wr003

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \in & \mathcal{A} \\ A, B \in \mathcal{A} & \Rightarrow & A * B \in \mathcal{A} \end{array}$$

definieren kann?

Aufgabe 4: Zwei Personen werfen unabhängig voneinander zwei nicht unterscheidbare reguläre Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die gleichen Augenzahlen werfen? wr004

Aufgabe 5: Zwei Personen werfen unabhängig voneinander zwei reguläre Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Personen die gleiche Augenzahlsumme werfen? wr005

Aufgabe 6: (L) Drei der klassischen Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Welches der Ereignisse hat jeweils die größte Wahrscheinlichkeit? wr006
a) Augenzahlsumme 9 oder Augenzahlsumme 10 beim Werfen dreier regulärer Würfel. (Galilei und der Herzog der Toskana).
b) Mindestens eine Sechs bei 4 Würfen mit einem Würfel oder mindestens ein Sechserpasch beim 24-maligen Werfen von zwei Würfeln. (de Méré).
c) Mindestens eine Sechs beim Werfen von sechs Würfeln, mindestens zwei Sechsen beim Werfen von 12 Würfeln oder mindestens drei Sechsen beim Werfen von 18 Würfeln. (Frage von Pepys an Newton).

Aufgabe 7: Aus einer Urne mit 3 roten und 4 schwarzen Kugeln und aus einer Urne mit 2 roten, 2 weißen und 3 schwarzen Kugeln wird je eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben? wr007

Aufgabe 8: (L) 4 Kugeln werden zufällig auf acht in einer Reihe angeordnete Schubladen verteilt, wobei in jede Schublade höchstens eine Kugel gelegt werden wr008 darf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei benachbarte Schubladen belegt werden?

Aufgabe 9: (L) Aus einem Regal mit fünf verschiedenen Paar Schuhen werden zufällig vier einzelne Schuhe genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Paar dabei ist? wr009

Aufgabe 10: (L) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim viermaligen Werfen eines regulären Würfels wr010
a) die größte geworfene Augenzahl die 4 ist,
b) die kleinste geworfene Augenzahl kleiner oder gleich 4 ist.

Aufgabe 11: (L) Ein regulärer Würfel wird n-mal geworfen. Wie groß ist unter der Annahme, dass es sich dabei um ein Laplace-Experiment handelt, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die kleinste geworfene Augenzahl die Zwei und die größte geworfene die Fünf ist? wr011

Aufgabe 12: (L) Ein regulärer Würfel wird dreimal nacheinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man dabei eine streng monotone Folge von Augenzahlen erhält? wr012

Aufgabe 13: (L) Die Ecken eines Würfels sind gleichmäßig schräg abgeschliffen worden, so dass der Würfel auch auf jeder dieser Ecken liegen bleiben kann. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit einer Ecke nur ein $1/4$ so groß wie die jeder Seite. wr013
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit einer Sechs?

Aufgabe 14: (L) In zwei Urnen befinden sich jeweils 40 durchnumerierte Lose. Aus jeder Urne werden ohne Zurücklegen zufällig vier Lose gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den acht gezogenen Losnummern wenigstens eine Zahl zweimal vorkommt? wr014

Aufgabe 15: (L) Bei einer Lotterie werde eine vierstellige Losnummer auf die folgende Weise ermittelt: In einer Trommel befinden sich 40 mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ versehene Kugeln, wobei jeweils 4 Kugeln die gleiche Ziffer tragen. Es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung nebeneinandergelegt. Die 4 Ziffern auf den gezogenen Kugeln ergeben dann die Losnummer. wr015
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
1. Die Losnummer 3494 wird gezogen.
2. Es wird eine Losnummer gezogen, in der nur die Ziffern 1 und 7 vorkommen. (Beide Ziffern sollen vorkommen.)
3. Es wird eine Losnummer gezogen, die aus 4 verschiedenen Ziffern besteht.

Aufgabe 16: (L) *Glücksspirale der Olympialotterie 1971*: In einer Trommel befinden sich 70 mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ versehene Kugeln, wobei jeweils 7 Kugeln die gleiche Ziffer tragen. Es werden 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung nebeneinandergelegt. Die 7 Ziffern auf den gezogenen Kugeln ergeben dann die Losnummer. wr016
Hat bei dieser Lotterie jedes Los die gleiche Chance?

Aufgabe 17: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n zufällig ausgewählten Personen **a)** mindestens zwei am selben Tag, **b)** genau zwei am selben Tag und alle anderen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, wenn Schaltjahre nicht berücksichtigt werden? wr017

Wie könnte man Schaltjahre berücksichtigen?

Aufgabe 18: (L) Auf wieviele Arten kann man K nicht unterscheidbare Kugeln auf N Schubladen verteilen, wenn in jede Schublade eine beliebige Anzahl (auch 0) von Kugeln gelegt werden darf? wr018

Aufgabe 19: (L) K Kugeln werden nacheinander zufällig auf N Schubladen verteilt. Hat dann jede Verteilung der Kugeln (s. Aufgabe 18) die gleiche Wahrscheinlichkeit? wr019

Aufgabe 20: 5 Kugeln werden zufällig auf 4 Schubladen verteilt. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten p_k ($k = 0, 1, 2, 3$), dass dabei genau k Schubladen leer bleiben? wr020
Kommt man mit den beiden Ansätzen „*Jede Kugelverteilung ist gleich möglich*“ und „*Die Kugeln werden nacheinander in zufällig ausgewählte Schubladen gelegt*“ zum gleichen Ergebnis?

Aufgabe 21: (L) Dem Zöllner NN ist zugespielt worden, dass unter den 40 Passagieren eines gerade ankommenden Fährschiffs zwei Schmuggelware mit sich führen. Wieviele der Passagiere muss er (zufällig) zur Kontrolle auswählen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $0,9$ wenigstens einen der Schmuggler zu erwischen? wr021

1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 22: (L) Ein regulärer Würfel wird dreimal geworfen. Wie groß ist unter der Bedingung, dass dabei lauter verschiedene Augenzahlen erscheinen, die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass wr022
a) mindestens eine Sechs dabei ist?
b) die Augensumme gleich 8 ist?

Aufgabe 23: (L) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, beim n-maligen Werfen eines regulären Würfels mehr als eine Sechs zu werfen unter der Bedingung, dass mindestens eine Sechs erscheint, $n = 3, 4, 5, \ldots$. wr023

Aufgabe 24: (L) Ein regulärer Würfel wird viermal geworfen. Wie groß ist unter der Bedingung, dass die geworfenen Augenzahlen alle verschieden sind, die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die größte geworfene Augenzahl die 5 ist? wr024

Aufgabe 25: (L) Ein regulärer Würfel wird dreimal geworfen. wr025
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei mindestens eine *Drei* geworfen wird unter der Bedingung, dass mindestens einer der Würfe eine *Sechs* ist?

Aufgabe 26: Ein regulärer Würfel wird viermal geworfen. Wie groß ist unter der Bedingung, dass die geworfenen Augenzahlen alle verschieden sind, die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die größte geworfene Augenzahl die 5 ist? wr026

Aufgabe 27: (L) Drei Kästen sind mit jeweils zwei Münzen gefüllt, einer mit zwei goldenen, einer mit zwei silbernen und einer mit einer goldenen und einer silbernen. Ein Kasten wird zufällig ausgewählt und es wird ihm blind eine Münze entnommen. wr027
Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die im gewählten Kasten verbleibende Münze aus Gold ist, unter der Bedingung, dass die entnommene Münze ebenfalls eine goldene war?

Aufgabe 28: **(L)** Für zwei Ereignisse A und B aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei $P(A|B) = P(\overline{A}|\overline{B}) = p$ und $P(B) = b$ mit $0 < p < 1$ und $0 < b < 1$. wr028

1. Für welchen Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig?
2. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ für den Fall, dass $p = 0.95$ und $b = 0.05$.

Aufgabe 29: A, B und C seien Ereignisse aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $0 < P(C) < 1$. Zeigen Sie, dass aus $P(A|C) \geq P(B|C)$ und $P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C})$ die Relation $P(A) \geq P(B)$ folgt. wr029

Aufgabe 30: **(L)** Für drei Ereignisse A, B, C in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei $P(A|C) = 0.5$, $P(A|\overline{C}) = 0$, $P(B|\overline{C}) = 0.6$, $P(\overline{B}|C) = 0.4$ und $P(C) = 0.3$. wr030
Welche der Ereignispaare A, C und B, C sind stochastisch unabhängig?

Aufgabe 31: **(L)** Zu einem Praktikum haben sich N Personen angemeldet, aber nur $M < N$ Plätze stehen zur Verfügung. Zur Auslosung der Personen, die Plätze bekommen, wird das folgende Verfahren angewandt: In eine Schachtel werden N Zettel gelegt; auf M von ihnen steht „Ja“, auf dem Rest „Nein“. In der Reihenfolge ihres Eintreffens zieht jede der angemeldeten Personen einen Zettel. Steht auf dem Zettel „Ja“, erhält die Person einen Platz. Ist dieses Verfahren gerecht, d. h. hat jeder die gleiche Chance, einen Praktikumsplatz zu erhalten? wr031

Aufgabe 32: **(L)** Gegeben sind n (numerierte) Urnen, die jeweils w weiße und s schwarze Kugeln enthalten. Für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ wird nacheinander aus Urne k zufällig eine Kugel gezogen und in Urne $k + 1$ gelegt. wr032
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine anschließend aus Urne n gezogene Kugel weiß ist?

Aufgabe 33: **(L)** Gegeben sind zwei Urnen U_1 und U_2. Urne U_1 enthält 5 rote und 3 schwarze, Urne U_2 4 rote und 4 schwarze Kugeln. Aus U_1 wird zufällig eine Kugel gezogen und in Urne U_2 gelegt, dann zieht man zufällig eine Kugel aus U_2 und legt sie in U_1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim anschließenden Ziehen einer Kugel aus U_1 eine rote Kugel zieht? wr033

Aufgabe 34: Aus einer Urne, die drei weiße und zwei scharze Kugeln enthält, werden zufällig zwei Kugeln entnommen und in eine zweite Urne gelegt, in der sich zuvor bereits vier weiße und vier schwarze Kugeln befanden. Anschließend wird aus der zweiten Urne zufällig eine Kugel gezogen. wr034
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die aus der zweiten Urne gezogene Kugel weiß ist?
b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die aus der ersten Urne gezogenenen Kugeln beide schwarz waren unter der Bedingung, dass anschließend aus der zweiten eine weiße Kugel gezogen wird.

Aufgabe 35: **(L)** Aus einer Urne mit 49 Kugeln, von denen 43 weiß und 6 schwarz sind, werden 7 Kugeln zufällig und ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den ersten 6 gezogenen Kugeln **a)** 5 schwarze, **b)** 3 schwarze befinden und außerdem die siebte gezogene Kugel schwarz ist? wr035

Aufgabe 36: **(L)** In einer US-Fernsehshow kann man auf die folgende Weise ein Auto gewinnen: Der Kandidat hat die Wahl zwischen drei Türen, wobei wr036

sich hinter zweien je eine Ziege befindet, die beim Öffnen das Meckern anfangen wird, und hinter einer das Auto, das man gewinnt, wenn man diese Tür gewählt hat.
Nachdem sich der Kandidat für eine Tür entschieden hat, öffnet der Showmaster eine der beiden anderen Türen und zwar eine, hinter der sich eine Ziege befindet. Jetzt hat der Kandidat noch einmal die Möglichkeit, seine Entscheidung zu revidieren. Er kann bei seiner ursprünglichen Wahl bleiben oder sich für die andere der beiden noch geschlossenen Türen entscheiden.
Was würden Sie an Stelle des Kandidaten tun — bei der ersten Entscheidung bleiben oder umdisponieren?

Aufgabe 37: (L) Wir nehmen jetzt im Unterschied zu vorhergehenden Aufgabe an, dass in einer Spielshow im Fernsehen zum Schluß noch zwei Kandidaten X und Y übrig sind. Diese stehen wiederum vor drei geschlossenen Türen, von denen eine zum Hauptpreis, einem Auto, führt, die anderen beiden dagegen zu Ziegen. Da Kandidat Y in den vorherigen Spielrunden mehr Punkte gesammelt hat, darf er zuerst eine Tür auswählen, und anschließend X eine andere. Falls Y die Tür mit dem Auto öffnet, erhält X als Trostpreis 1 kg Ziegenkäse, anderenfalls gibt ihm der Moderator die Gelegenheit, seine bisherige Wahl zu überdenken. Als Beispiel wähle Y Tür drei und X Tür eins. Der Moderator öffnet Tür drei, und eine Ziege schaut ins Publikum. Soll X nun bei Tür eins bleiben oder zu Tür zwei wechseln? Anders formuliert: Gibt es jetzt aus stochastischer Sicht berechtigte Gründe, bei der gewählten Tür zu bleiben bzw. die Tür zu wechseln, oder sind die Wahrscheinlichkeiten, den Preis hinter Tür eins bzw. Tür zwei zu finden, nach wie vor identisch? wr037

Aufgabe 38: (L) $A_0, A_1, A_2, \ldots$ und $B_0, B_1, B_2, \ldots$ seien Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften: wr038
1. Die B_n bilden eine Partition von Ω mit

$$P(B_n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$

2. Die A_k besitzen die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(A_k|B_n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{für } k = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

Berechnen Sie die unbedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_k)$.

Aufgabe 39: (L) A sagt, B hätte ihm erzählt, dass C gelogen hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass C tatsächlich gelogen hat, wenn jede der drei Personen mit Wahrscheinlichkeit p die Wahrheit spricht? wr039

Aufgabe 40: (L) A und B seien zwei Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$und es sei $0 < P(B) < 1$. Beweisen Sie, dass die beiden Ereignisse genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn $P(A|B) = P(A|\overline{B})$. wr040

1.3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Aufgabe 41: (L) Zeigen Sie, dass wr041

$$f(n) = np^2 q^{n-1} \qquad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit $0 < p < 1$ und $q = 1 - p$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist und berechnen Sie den Mittelwert der Verteilung mit dieser Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Aufgabe 42: Ein Würfel, bei dem die Augenzahl Sechs mit Wahrscheinlichkeit p, $0 < p < 1$, auftritt, wird mehrmals geworfen. wr042
Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Würfe bis zum m-ten Auftreten der Augenzahl Sechs, $m = 2, 3, 4, \ldots$.

Aufgabe 43: X und Y seien stochastisch unabhängige und mit Parametern λ bzw. μ Poisson-verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, und Z die durch $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ definierte Zufallsvariable. wr043
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $(Z = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Aufgabe 44: (L) $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}_0$ und $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}_0$ seien Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften: wr044
1. X ist Poisson-verteilt mit Parameter μ.
2. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$P[(Y = k)|(X = n)] = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{für } k = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

mit einer Zahl $0 < p < 1$.
Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen Y.

Aufgabe 45: (L) Ist P eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbf{N}_0$ oder einer Teilmenge von $\mathbf{N}_0$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(n)$, so heißt die Funktion wr045

$$\hat{f}(z) \;=\; \sum_n f(n) z^n$$

für $0 \le z \le 1$ die *erzeugende Funktion* von P.
1. Berechnen Sie die erzeugende Funktion der geometrischen Verteilung.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Verteilung mit der erzeugenden Funktion

$$\hat{f}(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

Aufgabe 46: Wie kann man den Mittelwert und die Varianz einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbf{N}_0$ mittels der erzeugenden Funktion berechnen? wr046

Aufgabe 47: (L) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und den Mittelwert der Verteilung mit der erzeugenden Funktion wr047

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{(2-z)^2}$$

Aufgabe 48: (L) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion, den Mittelwert und die Varianz der Verteilung mit der erzeugenden Funktion wr048

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+z}{3-z}$$

Aufgabe 49: Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der diskreten Verteilung mit der erzeugenden Funktion wr049

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{4-3z^2}$$

Aufgabe 50: Berechnen Sie die erzeugende Funktion $\hat{f}$ zu der Wahrscheinlichkeitsfunktion wr050

$$f(k) = \begin{cases} \alpha & \text{für } k = 0 \\ (1-\alpha)\,(1-\beta)\,\beta^{k-1} & \text{für } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

mit $0 < \alpha < 1$ und $0 < \beta < 1$ sowie Mittelwert und Varianz der zugehörigen Verteilung.

Aufgabe 51: (L) X und Y seien stochastisch unabhängige $\mathbf{N}_0$-wertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deren Verteilungen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen f^X bzw. f^Y besitzen, und Z die durch $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ gegebene Zufallsvariable. wr051
Zeigen Sie, dass die Verteilung von Z die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f^Z(n) = f^X * f^Y(n) = \sum_{k=0}^{n} f^X(k) f^Y(n-k)$$

besitzt.

Aufgabe 52: (L) X und Y seien stochastisch unabhängige $\mathbf{N}_0$-wertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deren Verteilungen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen f^X bzw. f^Y besitzen, und Z die durch $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ gegebene Zufallsvariable. wr052
1. Zeigen Sie, dass die Verteilung von Z die erzeugende Funktion $\hat{g}(z) = \widehat{f^X}(z)\widehat{f^Y}(z)$ besitzt.
2. Welche Verteilung besitzt Z, wenn X und Y Poisson-verteilt mit Parametern λ bzw. μ sind?

Aufgabe 53: (L) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängige Zufallsvariable, die nur die Werte 0 und 1 annehmen und die alle die gleiche Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(0) = q$ und $f(1) = p$ mit $p + q = 1$ besitzen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Verteilung der Zufallsvariablen $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$. wr053

Aufgabe 54: (L) X und Y seien stochastisch unabhängige und mit Parameter p geometrisch verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $Z = \min(X, Y)$, definiert durch $Z(\omega) = \min\{X(\omega), Y(\omega)\}$ für $\omega \in \Omega$? wr054

Aufgabe 55: (L) Zeigen Sie, dass wr055

$$f(k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für $a > 0$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion zu einer Verteilung auf $\mathbf{N}_0$ ist und berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz dieser Verteilung.

Aufgabe 56: Fünf nicht unterscheidbare Kugeln werden zufällig auf drei nummerierte Schubladen verteilt, wobei jede Verteilung gleich möglich sei. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Schubladen an, die dabei leer bleiben. wr056
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und den Erwartungswert von X.

Aufgabe 57: Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der geometrischen Verteilung. wr058

Aufgabe 58: (L) Berechnen Sie den Mittelwert der hypergeometrischen Verteilung. wr059

Aufgabe 59: In einem kleinen See fängt man 100 Forellen und setzt sie nach Markierung wieder aus. Später fängt man wieder 100 und findet darunter 7 markierte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der See n Forellen enthält? Wie würde man aus dem Ergebnis dieses statistischen Experiments einen „vernünftigen“ Schätzwert für den wahren Wert von n ermitteln? wr060

Aufgabe 60: Zeigen Sie, dass der Mittelwert einer diskreten Verteilung P auf $\mathbf{N}_0$ die Gleichung wr061

$$m_1(P) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

mit den Mengen $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$ erfüllt.

Aufgabe 61: Zeigen Sie, dass für eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbf{N}_0$ die Formel $\mathcal{E}\,X \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$ gilt. wr062

Aufgabe 62: (L) Einem Passanten wird an einer Straßenecke folgendes Würfelspiel mit zwei symmetrischen, unabhängig geworfenen Tetraedern (= *vierseitiger Würfel mit Augenzahlen 1 bis 4*) vorgeschlagen: wr063
Zeigen die beiden Würfel die gleiche Augenzahl, so erhält er das Fünffache seines Einsatzes zurück, unterscheiden sich die Augenzahlen dagegen um 1, 2 oder 3, so verliert er den ein-, zwei- bzw. dreifachen Einsatz.
1. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns.
2. Wie hoch muss die Auszahlung (als Vielfaches des Einsatzes) bei gleicher Augenzahl sein, damit das Spiel fair wird?

Aufgabe 63: (L) Beim Würfelspiel „Die verflixte Sechs“ kann man eine beliebige Anzahl von Würfeln vom Tisch nehmen und werfen. Ist unter den geworfenen Augenzahlen mindestens eine Sechs, so ist der Gewinn Null. Andernfalls erhält man die Summe der geworfenen Augenzahlen als Gewinn gutgeschrieben. wr064
Wieviele Würfel sollte man nehmen?

1.4 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 64: (L) Wie dick im Verhältnis zum Durchmesser müsste eine Münze sein, damit sie beim Wurf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ auf dem Rand stehen bleibt? wr065

Aufgabe 65: (L) Zwei Zahlen werden zufällig aus dem Intervall $[0, 1]$ ausgewählt. wr066
Wie groß ist unter der Bedingung, dass das Maximum der beiden Zahlen größer als $\frac{1}{2}$ ist, die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Minimum kleiner als $\frac{1}{4}$ ist?

Aufgabe 66: (L) Ein Stab wird zufällig an zwei Stellen auseinandergebrochen. wr067
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man aus den drei Bruchstücken ein Dreieck formen kann?

Aufgabe 67: (L) Ein Stab wird an einer zufällig ausgewählten Stelle auseinandergebrochen und das längere der beiden Stücke noch einmal zufällig geteilt. wr068
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man aus den drei Bruchstücken ein Dreieck formen kann?

1.5 Verteilungsfunktionen und Dichten

Aufgabe 68: (L) Für welche Werte der Parameter α und β ist die Funktion wr069

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Dichte?

Aufgabe 69: (L) Für welchen Wert der Konstanten c ist die Funktion wr070

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte zu einer eindimensionalen Verteilung? Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz dieser Verteilung.

Aufgabe 70: (L) Für welchen Wert der Konstanten c ist die Funktion wr071

$$f(x) = \frac{c}{\alpha^2 + (x-\beta)^2}$$

mit Parametern $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbf{R}$ Dichte zu einer eindimensionalen Verteilung? Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz dieser Verteilung.

Aufgabe 71: (L) Zeigen Sie, dass wr072

$$F_a(t) = e^{-e^{-(t-a)}} \quad , \quad t \in \mathbf{R}$$

mit Parameter $a \in \mathbf{R}$ eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie die Dichte und den Mittelwert der zugehörigen Verteilung.

Aufgabe 72: (L) Zeigen Sie, dass wr073

$$G_\beta(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\beta}\right)^2} & \text{für } t \ge 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

mit Parameter $\beta > 0$ eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie die Dichte, den Mittelwert und die Varianz der zugehörigen Verteilung.

Aufgabe 73: (L) Berechnen Sie die Mittelwerte der Verteilungen mit den Dichten wr074

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Aufgabe 74: Zeigen Sie, dass wr075

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der zugehörigen Verteilung.

1.6 Zufallsvariablen

Aufgabe 75: Beweisen Sie die folgende Aussage: Sind $X_i : \Omega \longrightarrow \Omega_i$ für $i = 1, \ldots, n$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$und $Y_i : \Omega_i \longrightarrow \hat{\Omega}_i$ beliebige meßbare Abbildungen, so sind die Zufallsgrößen $Z_i = Y_i \circ X_i$ ebenfalls stochastisch unabhängig. (Auf den Ω_i und $\hat{\Omega}_i$ seien jeweils σ-Algebren $\mathcal{A}_i$ bzw. $\hat{\mathcal{A}}_i$ vorgegeben.) wr076

Aufgabe 76: (L) Berechnen sie die Verteilung P^X der Zufallsvariablen $X(s) := as + b$ mit $a \neq 0$ in dem Schema wr077

$$(\mathbf{R}, \mathcal{B}, P) \xrightarrow{X} (\mathbf{R}, \mathcal{B}, P^X)\ ,$$

wenn P die $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung ist.

Aufgabe 77: (L) Berechnen sie die Verteilung P^X in dem Schema wr078

$$(\mathbf{R}, \mathcal{B}, P) \xrightarrow{X} (\mathbf{R}, \mathcal{B}, P^X)\ ,$$

wenn P die $\mathcal{E}(\lambda)$-Verteilung, $X(s) = -\log(s)$ für $s > 0$ und $X(s) = 0$ für $s \leq 0$ ist.

Aufgabe 78: Berechnen Sie die Dichte und den Mittelwert der Verteilung P^X in dem Schema $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, P) \xrightarrow{X} (\mathbf{R}, \mathcal{B}, P^X)$ wenn P die Verteilung mit der Verteilungsfunktion wr079

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

und $X(t) = t^2$ ist.

Aufgabe 79: Berechnen Sie die Dichte der Verteilung P^X der Zufallsvariablen X auf dem Wahrscheinlichkeitraum $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, P)$, wenn P die $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung und wr080

1. $X(t) = 1 + 3t$

2. $X(t) = 1 - 3t$
3. $X(t) = t^2$
ist. (*Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung* $F'(t) = f(t)$ *zwischen Verteilungsfunktion und Dichte, wenn die Verteilungsfunktion differenzierbar ist.*)

Aufgabe 80: (L) Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $Y(t) = e^{-t}$ bezüglich der eindimensionalen Verteilung P mit der Verteilungsfunktion wr081

$$F(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-2t}}$$

Aufgabe 81: Eine Zielscheibe sei kreisförmig mit einem Radius von 10 cm und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Treffer innerhalb eines konzentrischen Kreises liegt, sei für jeden solchen Kreis proportional zu seiner Fläche. X sei der Abstand der Kugel vom Zentrum. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Mittelwert der Verteilung von X. wr082

Aufgabe 82: X sei eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deren Verteilung eine stetige und streng monotone Verteilungsfunktion F besitzt. wr083
1. Welche Verteilung besitzt dann die Zufallsvariable $Y = F \circ X$?
2. Sei F^- die Umkehrfunktion zu F und U eine $\mathcal{U}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Welche Verteilung besitzt dann die Zufallsvariable $Z = F^- \circ U$?

Aufgabe 83: (L) Zwei reelle Zahlen x und y werden zufällig und unabhängig voneinander aus dem Intervall $[0,1]$ ausgewählt. wr084

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Der Abstand der Punkte x und y beträgt höchstens t“, $0 \le t \le 1$.

b) Berechnen Sie die Verteilung und den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Z(x,y) = |x - y|$ (Abstand der Punkte).

1.7 Mehrdimensionale Verteilungen

Aufgabe 84: Für welchen Wert der Konstanten c ist wr085

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} cx_1(x_1 - x_2) & \text{falls} \quad 0 \le x_1 \le 2 \quad \text{und} \quad 0 \le x_2 \le x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte zu einer Verteilung im $\mathbf{R}^2$?
Berechnen Sie die Marginaldichten.
Berechnen Sie die Verteilung des Zufallsvektors $Y = (Y_1, Y_2)$ mit $Y_1 = X_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1$, sowie ihre Marginalverteilungen, wenn die Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ diese Dichte besitzt.

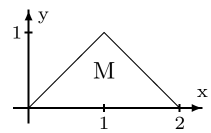
Aufgabe 85: (L) Berechnen Sie die Marginaldichten der Dichte wr086

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & \text{falls } x > 0 \text{ und } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und deren Mittelwerte.

Aufgabe 86: (L) wr087

M sei das Dreieck im $\mathbf{R}^2$, das durch die Geraden $y = 0$, $y = x$ und $y = 2 - x$ begrenzt wird (s. nebenstehende Skizze).



1. Für welchen Wert des Parameters c ist die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} cy & \text{falls } (x, y) \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte?
2. Berechnen Sie die Marginaldichten.

Aufgabe 87: (L) Für welchen Wert des Paramaters c ist die Funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definiert durch wr1068

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} ce^{-(2x_1+3x_2)} & \text{für } x_1 > 0 \text{ und } 0 < x_2 < x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte? Berechnen Sie die Marginaldichten.

Aufgabe 88: (L) Für welchen Wert des Paramaters c ist die Funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definiert durch wr088

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c \sin(x_1 + x_2) & \text{falls} \quad 0 \le x_1 \le \pi/2 \quad \text{und} \quad 0 \le x_2 \le \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

Aufgabe 89: (L) Für welchen Wert der Konstanten c ist wr089

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c \sin(x_1 + x_2) & \text{falls} \quad x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ x_1 + x_2 \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine zweidimensionale Dichte?
Berechnen Sie die Dichten und Mittelwerte der Marginalverteilungen.

1.8 Funktionen von Zufallsvariablen

Aufgabe 90: (L) Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und uniform verteilt im Intervall $[0, 1]$. wr090
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(X_1 X_2 \le 1/2)$.

Aufgabe 91: Eine Bank hat zwei Schalter mit Bedienungszeiten, die für alle Kunden stochastisch unabhängige und mit gleichem Parameter λ exponentiell verteilte Zufallsvariable sind. Drei Kunden A, B und C betreten gleichzeitig die Bank. A und B werden sofort bedient und C wartet, bis ein Schalter frei wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse, dass A und dass C als Letzter die Bank verlässt. wr091

Aufgabe 92: (L) $X = (X_1, X_2)$ sei ein Zufallsvektor, dessen Verteilung die Dichte wr092

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_2} & \text{falls } x_1 > 0 \text{ und } x_2 > x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt. Berechnen Sie die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen $Y_1 = X_2 - X_1$.
Hinweis: Hier empfiehlt sich die Ergänzung $y_2 = x_1$.

Aufgabe 93: Die Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ besitze die Dichte wr093

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_2} & \text{falls } x_1 > 0 \text{ und } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = X_1 + X_2$.

Aufgabe 94: (L) Berechnen Sie die Verteilung von $Y = \max(X_1, X_2)$, wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind und ihre Verteilungen die Verteilungsfunktionen F_a bzw. F_b aus Aufgabe 71 besitzen. wr094

Aufgabe 95: (L) Berechnen Sie die Verteilung von $Y = \min(X_1, X_2)$, wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind und ihre Verteilungen die Verteilungsfunktionen G_α bzw. G_β aus Aufgabe 72 besitzen. wr095

Aufgabe 96: Berechnen Sie die Verteilung von $Y = \min(X_1, X_2)$, wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch unabhängig und exponentiell verteilt mit Parametern λ bzw. μ sind. wr096

Aufgabe 97: (L) Drei Glühbirnen werden zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet. Ihre Lebensdauern sind drei stochastisch unabhängige Zufallsvariable X_1, X_2, X_3, deren Verteilungen alle die gleiche Verteilungsfunktion wr097

$$F(t) = \mathcal{P}(X_i \leq t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

besitzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine der drei Glühbirnen den Zeitpunkt $t = 9$ überlebt?

Aufgabe 98: (L) Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und ihre Verteilungen mögen die Dichten f_1 bzw. f_2 und die Verteilungsfunktionen F_1 bzw. F_2 besitzen. wr098
Entwickeln Sie eine Formel zur Berechnung der Ereignisse $(X_1 > aX_2)$ mit positiven reellen Zahlen a.

Aufgabe 99: (L) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(X_1 > X_2)$ unter den Voraussetzungen von Aufgabe 98, wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 exponentiell verteilt mit Parametern λ_1 bzw. λ_2 sind. wr099

Aufgabe 100: (L) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(X_1 > X_2)$ unter den Voraussetzungen von Aufgabe 98, wenn die Verteilungen der Zufallsvariablen X_1 und X_2 Extremwertverteilungen mit den Verteilungsfunktionen F_a bzw. F_b aus Aufgabe 71 sind. wr100

Aufgabe 101: X_1, X_2 und X_3 seien stochastisch unabhängige Zufallsvariable, deren Verteilungen die Verteilungsfunktionen wr101

$$F_i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-a_i t^2} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t \leq 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3$$

mit $a_1 = a_3 = 1$ und $a_2 = 2$ besitzen.
1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(X_3 < \min(X_1, X_2))$.

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(X_2 > 3X_1)$.

Aufgabe 102: Die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 seien stochastisch unabhängig und ihre Verteilungen mögen die Verteilungsfunktionen wr102

$$F_i(t) = e^{-e^{-(t-a_i)}}$$

mit $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$ besitzen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$(X_3 < \max(X_1, X_2))$$

Aufgabe 103: Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ besitze die Verteilung mit der Dichte wr105

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1(x_1 - x_2) & \text{falls } 0 \leq x_1 \leq 2 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Verteilung des Zufallsvektors $Y = (Y_1, Y_2)$ mit

$$Y_1 = X_1 - X_2 \quad \text{und} \quad Y_2 = X_1$$

sowie ihre Marginalverteilungen.

Aufgabe 104: (L) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable wr106

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2},$$

falls X_1 und X_2 exponentiell verteilt mit Parameter λ und stochastisch unabhängig sind?

Aufgabe 105: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und beide exponentiell verteilt mit Parameter 1. Berechnen Sie die Dichte des Zufallsvektors (Y_1, Y_2) mit wr107

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad \text{und} \quad Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

Sind Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig? (*Begründung*).

Aufgabe 106: Die Verteilung des Zufallsvektors (X_1, X_2) besitze die Dichte wr108

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x_2} & \text{falls} \quad x_1 > 0 \text{ und } x_2 > x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = \sqrt{X_1 + X_2}$.

Aufgabe 107: X und Y seien stochastisch unabhängige Zufallsvariable, X exponentiell verteilt mit Parameter α und Y exponentiell verteilt mit Parameter β. wr109
Berechnen Sie die Dichte, den Mittelwert und die Varianz der Verteilung der Zufallsvariablen $Z = 2X + 3Y$.
(Auf Nenner 0 bei Brüchen achten!)

Aufgabe 108: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. X_1 sei uniform im Intervall $(0, 1)$ verteilt und die Verteilung von X_2 besitze die Dichte wr110

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{falls } 0 \le t \le 1 \\ 2-t & \text{falls } 1 < t \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte der Verteilung von $X_1 + X_2$.

Aufgabe 109: Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Dichte wr111

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & \text{falls} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Z = X/Y$.

Aufgabe 110: Der Zufallsvektor (X_1, X_2) besitze die Verteilung mit der Dichte wr112

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 10e^{-(3x_1+2x_2)} & \text{falls} \quad x_2 > 0 \\ & \text{und} \quad 0 < x_1 < x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = X_1/X_2$.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(Y > 1/2)$.

Aufgabe 111: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. Die Verteilung von X_1 sei die Rayleigh-Verteilung mit der Verteilungsfunktion wr113

$$F_1(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \le 0 \end{cases}$$

und X_2 sei exponentiell verteilt mit der Dichte

$$f_2(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \le 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen

$$Y = \frac{X_1^2}{X_2}$$

Aufgabe 112: (L) X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängige Zufallsvariable. X_1 sei $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt und X_2 exponentiell verteilt mit Parameter $\frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen wr114

$$Y = \sqrt{2}\frac{X_1}{\sqrt{X_2}}$$

Hinweis: $\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}\,dt = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Aufgabe 113: (L) X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und $\mathcal{U}(0,1)$-verteilt. Berechnen Sie die Verteilungen von wr115

$$Y_1 = \sqrt{-2\log X_1} \cdot \cos(2\pi X_2)$$

und

$$Y_2 = \sqrt{-2\log X_1} \cdot \sin(2\pi X_2).$$

Aufgabe 114: (L) Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ sei uniform verteilt auf der Menge wr116

$$M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2\ ;\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}.$$

Berechnen Sie die Verteilung des Zufallsvektors $Y = (Y_1, Y_2)$ mit

$$Y_1 = X_1^2 + X_2^2 \text{ und } Y_2 = \frac{X_1}{X_2}.$$

Sind Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?

Aufgabe 115: (L) Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und exponentiell verteilt mit dem gleichen Parameter $\lambda > 0$ und es sei $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1/X_2$. wr117

1. Berechnen Sie die Verteilung des Zufallsvektors $Y = (Y_1, Y_2)$.

2. Sind die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?

Aufgabe 116: Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ sei uniform verteilt auf der Menge wr118

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2\ ;\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen X_1 und X_2 und den Erwartungswert von $Y = X_1^2 + X_2^2$.

Aufgabe 117: (L) Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ besitze eine Verteilung mit der Dichte wr119

$$f(x_1, x_2) \;=\; \frac{1}{6\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)}$$

Für welche Werte des Parameters a sind die Zufallsvariablen $Y_1 = X_1 - aX_2$ und $Y_2 = 2X_1 + X_2$ stochastisch unabhängig?

Aufgabe 118: X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und $\mathcal{U}(0,1)$-verteilt. wr121
Berechnen Sie die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen

$$Y = X_1^2 \cdot X_2^2$$

Aufgabe 119: (L) Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien uniform verteilt im Intervall $[0,1]$ und stochastisch unabhängig. wr122

a) Berechnen Sie die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen $Y = X_1^2\, X_2$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

Aufgabe 120: Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Y = X_1 + X_2 + X_3$, wenn die X_i stochastisch unabhängig und exponentiell verteilt mit Parameter λ sind. wr123

Aufgabe 121: $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_m < \ldots$ seien die zufälligen Zeitpunkte, zu denen in einer Telefonzentrale die Ankunft eines Anrufs registriert wird. Berechnen Sie die Verteilung des Zufallsvektors $T = (T_1, T_2, \ldots, T_m)$, wenn die **Zwischenankunftszeiten** $X_1 = T_1$, $X_2 = T_2 - T_1$, $X_3 = T_3 - T_2$, $\ldots$, $X_m = T_m - T_{m-1}$ stochastisch unabhängige und mit Parameter λ exponentiell verteilte Zufallsvariable sind. wr124

1.9 Erwartungswert und Varianz

Aufgabe 122: Die Verteilung der Zufallsvariablen X besitze die Dichte wr125

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{4t^4}{3}\mathrm{e}^{-2t} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = \dfrac{1}{X^2}$.

Beachten Sie, dass $Y = G(X)$ *mit* $G(x) = 1/x^2$.

Aufgabe 123: Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig und beide exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda = 2$. wr126
Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}(S^3)$ für die Zufallsvariable $S = X + Y$.

Aufgabe 124: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und uniform verteilt im Intervall $(0, 1)$. wr127
Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen $Y_1 = X_1 X_2$ und $Y_2 = X_1$.

Aufgabe 125: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und im Intervall $[0, 1]$ uniform verteilt. wr128
Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = X_1(X_2 - X_1)$.

Aufgabe 126: Die Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ besitze die Dichte wr129

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} [(1 + x_1)(1 + x_2) - 1]e^{-x_1 - x_2 - x_1 x_2} & \text{falls } x_1 > 0 \text{ und } x_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Marginaldichten.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1.
3. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = 3\,X_1^2 - 4\,X_2$.

Aufgabe 127: X sei eine mit Parameter λ exponentiell verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. wr130
Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y(\omega) = \max(X(\omega), \frac{1}{\lambda})$.

Aufgabe 128: (L) X sei eine mit Parameter $\lambda = 0.5$ exponentiell verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y(\omega) = \max(X^2(\omega), 2)$. wr132

Aufgabe 129: (L) Gegeben sei die Funktion wr133

$$f(t) = \begin{cases} c\,t(2 - t) & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Für welchen Wert des Parameters c ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

2. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = \max(X, 1)$, wenn die Verteilung der Zufallsvariablen X die Dichte f aus Aufgabenteil 1 besitzt.
3. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = \min(X, 1)$, wenn die Verteilung der Zufallsvariablen X die Dichte f aus Aufgabenteil 1 besitzt.

Aufgabe 130: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. wr134
Die Verteilung von X_1 sei die Rayleigh-Verteilung mit der Verteilungsfunktion

$$F_1(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

und X_2 sei exponentiell verteilt mit der Dichte

$$f_2(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X_1^2.
2. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $X_1^2 + X_2$.
3. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_1^2 + X_2$

Aufgabe 131: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. wr135
Die Verteilung von X_1 sei die Rayleigh-Verteilung mit der Verteilungsfunktion

$$F_1(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

und X_2 sei exponentiell verteilt mit der Dichte

$$f_2(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen $Y_1 = X_1 + 2X_2$ und $Y_2 = X_1 - X_2$.

Aufgabe 132: Die Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ besitze die Dichte wr136

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_2} & \text{falls } x_1 > 0 \text{ und } x_2 > x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Erwartungswerte, die Varianzen und die Kovarianz der Zufallsvariablen X_1 und X_2.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_1(X_2 - X_1)$.

Aufgabe 133: Für welchen Wert des Parameters c ist wr137

$$f(x, y) = \begin{cases} c \sin(x + y) & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte?
Berechnen Sie die Erwartungswerte, die Varianzen und die Kovarianz der Zufallsvariablen X und Y, wenn die Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) diese Dichte besitzt.

Aufgabe 134: (L) Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ sei auf der Menge wr138

$$M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ |x_1| + |x_2| \leq 1\right\}$$

uniform verteilt. Berechnen Sie die Erwartungswerte, Varianzen und die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2.

Aufgabe 135: Die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 seien stochastisch unabhängig und uniform verteilt im Intervall $[0,2]$. Berechnen Sie die Verteilung und den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. wr139

Aufgabe 136: (L) Die Zielscheibe beim Bogenschießen hat bei größeren Distanzen einen Durchmesser vom 122 cm und ist in 10 konzentrische Ringe mit 1 bis 10 Wertungspunkten unterteilt. Wie groß ist die mittlere Punktzahl, die man erreicht, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Treffpunkt die Dichte wr140

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2)}$$

besitzt? Der Parameter σ ist dabei so zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit, die Scheibe nicht zu treffen (0 Punkte), gleich 0.1 ist.

Aufgabe 137: Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig und mit Parametern $\lambda_X = 1$ bzw. $\lambda_Y = 2$ exponentiell verteilt. Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen $U = 2X + 3Y$ und $V = 3X - Y$. wr141

Aufgabe 138: Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen $Y_1 = X_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1$, wenn der Zufallsvektor (X_1, X_2) die Verteilung mit der Dichte wr142

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1(x_1 - x_2) & \text{falls} \quad 0 \leq x_1 \leq 2 \quad \text{und} \quad 0 \leq x_2 \leq x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Aufgabe 139: Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen $Y_1 = X_1$ und $Y_2 = X_1 - X_2$, wenn der Zufallsvektor (X_1, X_2) auf der Menge wr143

$$M = \{(x_1, x_2)\ ;\ 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq x_1\}$$

uniform verteilt ist.

Aufgabe 140: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. Die Verteilung von X_1 besitze die Dichte wr144

$$f_1(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

und X_2 sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda = 2$.
Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen $Y_1 = 3X_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1 + X_2$.

Aufgabe 141: (L) $X_1, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängige und im Intervall $(-1, 1)$ uniform verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen wr145

$$Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Aufgabe 142: (L) X sei eine mit Parameter λ exponentiell verteilte Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y(\omega) = \max\left(X(\omega), \frac{1}{\lambda}\right)$. wr146

Aufgabe 143: (L) Ein Eisdielenpächter wird jeden Morgen mit seinem Tagesvorrat an Eis beliefert. Er weiß, dass die Nachfrage nach Eis exponentiell verteilt mit einem Parameter $\lambda > 0$ ist. Einkaufspreis einer Mengeneinheit Eis sei p_1 DM und Verkaufspreis sei p_2 DM. Am Abend wird das nicht verkaufte Eis vernichtet. Wieviele Einheiten muß der Pächter jeden Tag bestellen, damit der zu erwartende Gewinn maximal wird? wr147

Aufgabe 144: (L) X und Y seien Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit den Erwartungswerten $\mathcal{E}X = 0$, $\mathcal{E}Y = 0.5$, den Varianzen $\operatorname{var} X = 1$, $\operatorname{var} Y = 2$ und der Kovarianz $\operatorname{cov}(X, Y) = 0.5$. wr148
1. Formen Sie den Ausdruck $f(a, b) = \mathcal{E}(Y - aX - b)^2$ gemäß den Rechenregeln für den Erwartungswert in ein Polynom in den Variablen a und b um.
2. Für welche Werte von a und b wird die Funktion $f(a, b)$ minimal?

Aufgabe 145: (L) Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, X_3)$ besitze die Kovarianzmatrix wr149

$$\mathcal{C}_X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariablen $Y = X_1 - a\,X_2 - b\,X_3$.
b) Für welche Werte der Parameter a und b ist diese Varianz minimal?

1.10 Normalverteilung

Aufgabe 146: (X_1, X_2) sei ein normalverteilter Zufallsvektor mit $\mathcal{E}X_1 = \mathcal{E}X_2 = 0$ und der Kovarianzmatrix wr150

$$\mathcal{C}_X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

und es sei $Y_1 = aX_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1 + 2X_2$.
Für welche Werte des Parameters a sind die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?

Aufgabe 147: (L) G_1, G_2 und G_3 seien stochastisch unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 gegeben durch wr151

$$\begin{aligned} X_1 &= 3G_1 - aG_2 + bG_3 \; + \; 2 \\ X_2 &= bG_1 + aG_2 + G_3 \; + \; 1 \\ X_3 &= aG_1 + bG_2 - 4G_3 \end{aligned}$$

mit reellen Parametern a und b.
1. Berechnen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2, X_3)$.
2. Gibt es Werte der Parameter a und b, für die die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 stochastisch unabhängig sind?

Aufgabe 148: (L) X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable. Sind die Zufallsvariablen $Y_1 = X_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1 + X_2$ ebenfalls stochastisch unabhängig? wr152

Aufgabe 149: (L) X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. wr153

Bestimmen Sie die Verteilung von

$$Y = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{(X_1 - X_2)^2}}$$

2 Lösungsvorschläge

2.1 Ereignisse, Laplace-Experimente

Lösung zu Aufgabe 1 wr001

(a) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

(b) $A \cap B \cap \overline{C}$

(c) $A \cap B \cap C$

(d) $A \cup B \cup C$

(e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(f) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} + \overline{A} \cap B \cap \overline{C} + \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

(g) $A \cap B \cap \overline{C} + A \cap C \cap \overline{B} + B \cap C \cap \overline{A}$

(h) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

(i) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Lösung zu Aufgabe 2 wr002

1. Um zu zeigen, dass es sich bei der Menge $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbf{N}\ ;\ |A| < \infty \text{ oder } |\bar{A}| < \infty\}$ um eine Mengenalgebra handelt, müssen die drei Eigenschaften nachgeprüft werden, die eine Mengenalgebra charakterisieren.

1. $\mathbf{N} \in \mathcal{A}$ ist richtig, denn $|\bar{\mathbf{N}}| = |\emptyset| = 0 < \infty$.
2. Ist $A \in \mathcal{A}$, so besitzt $B = \bar{A}$ wegen $\bar{B} = \bar{\bar{A}} = A$ die gleichen Eigenschaften wie A: Entweder $|B| < \infty$ oder $|\bar{B}| < \infty$.
3. Sind A und B aus $\mathcal{A}$ und sind beide Mengen endlich, dann ist auch $A \cup B$ endlich und damit aus $\mathcal{A}$. Ist wenigstens eine der beiden Mengen nicht endlich, z.B. A, dann ist $\bar{A}$ endlich. Wegen
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{A}$$
ist dann auch $\overline{A \cup B}$ endlich und daher $A \cup B$ ein Element von $\mathcal{A}$.

2. Die einelementigen Mengen $A_k = \{2k\}$ für $k = 1, 2, \ldots$ sind alle aus $\mathcal{A}$. Ihre Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, die Menge der geraden Zahlen, ist nicht endlich und ebensowenig ihre Komplementärmenge, die Menge der ungeraden Zahlen. A ist also kein Element von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ daher keine σ-Algebra.

Lösung zu Aufgabe 6 wr006

Um das Werfen von n Würfeln als Laplace-Experiment ansetzen zu können, muss man von unterscheidbaren Würfeln bzw. vom n-maligen Werfen eines Würfels ausgehen:

$$\Omega_n = \{\omega = (z_1, z_2, \ldots, z_n)\ ;\ z_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Dabei ist z_i zu interpretieren als die Augenzahl, die beim i-ten Wurf erscheint.

Die Menge Ω_n enthält $|\Omega_n| = 6^n$ Elemente.

(a) Hier muss man einfach alle Ergebnisse auflisten und abzählen, die zum jeweiligen Ereignis gehören. In aufsteigender Reihenfolge geordneten verschiedenen Augenzahlen $w_1 < w_2 < w_3$ entsprechen $3! = 6$ Ergebnisse, weil jede Permutation ein anderes Ergebnis liefert.
$1, 4, 5$ z.B. entsprechen $(1, 4, 5), (1, 5, 4), (4, 1, 5), (4, 5, 1), (5, 1, 4), (5, 4, 1)$.
Sind zwei Augenzahlen gleich, z.B. $2, 2, 6$, so entsprechen dem 3 Ergebnisse: $(2, 2, 6), (2, 6, 2), (6, 2, 2)$ und drei gleiche Augenzahlen entsprechen einem Ergebnis (w, w, w).

Augenzahlsumme 9		Augenzahlsumme 10	
Kombination	Anzahl Ergebnisse	Kombination	Anzahl Ergebnisse
1 2 6	6	1 3 6	6
1 3 5	6	1 4 5	6
1 4 4	3	2 2 6	6
2 2 5	3	2 3 5	3
2 3 4	6	2 4 4	3
3 3 3	1	3 3 4	3
Summe:	25	Summe:	27

Augenzahlsumme 10 hat demnach die größerer Wahrscheinlichkeit.

(b) Hier ist das Abzählen mühselig, man geht am besten vom Komplementärereignis aus.
Das Ereignis „keine Sechs bei 4 Würfen“ wird durch die Menge

$$B_5 = \{\omega = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \Omega_4 \; ; \; z_i = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

mit $|B_5| = 5^4$ Elementen beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs bei 4 Würfen zu erhalten, ist dann

$$p_1 = 1 - P(B_5) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 1 - 0.4822530846 = 0.5177469136$$

Das 24-fache Werfen eines Würfelpaars beschreibt man durch die Ergebnismenge

$$\Omega = \{\omega = (w_1, w_2, \ldots, w_{24} \; ; \; w_i = (z_{i1}, z_{i2}) \; , \; z_{ik} = 1, 2, \ldots, 6\}$$

Da es 36 Augenzahlpaare (z_1, z_2) gibt, ist $|\Omega| = 36^{24}$.
Beim Komplementärereignis „kein Secherpasch bei 24 Würfen“ sind pro Wurf alle Paare (z_1, z_2) mit Ausnahme von $(6, 6)$ zugelassen, also 35. Das Komplementärereignis B enthält also $|B| = 35^{24}$ Elemente und die Wahrscheinlichkeit, bei 24 Würfen mindestens einen Sechserpasch zu erhalten, ist

$$p_2 = 1 - P(B) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0.5085961239 = 0.4914038761$$

(c) *Das kann man eleganter mit Bernoulli-Versuchsreihen formulieren. Die kommen aber in der Vorlesung jetzt gerade erst dran, also machen wir die Ochsentour:*
1. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Sechs bei sechs Würfen berechnet man wie in Aufgabenteil (b):

$$p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 1 - 0.3348979767 = 0.6651020233$$

2. Das Komplementärereignis B: „höchstens eine Sechs bei 12 Würfen" setzt sich aus zwei Ereignissen zusammen: $B = B_0 + B_1$, wobei B_0: „keine Sechs bei 12 Würfen" und B_1: „genau eine Sechs bei 12 Würfen".
Es ist $|B_0| = 5^{12}$ und $B_1 = A_1 + A_2 + \ldots + A_6$, wobei A_k die Menge aller Wurffolgen $(z_1, z_2, \ldots, z_{12})$ mit $z_k = 6$ und $z_j \leq 5$ für die übrigen Komponenten $j \neq k$ ist. Es ist $|A_k| = 5^{11}$ und $|B_1| = 12 \cdot 5^{11}$. Daher

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 - P(B) = 1 - P(B_0) - P(B_1) \\ &= 1 - \frac{5^{12}}{6^{12}} - \frac{12 \cdot 5^{11}}{6^{12}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 2\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \\ &\approx 0.6186673737 \end{aligned}$$

3. Man geht vor wie bei 2., wobei die 12 durch 18 zu ersetzen ist, nur muss man noch zusätzlich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B_2: „Genau zwei Sechsen bei 18 Würfen" abziehen. B_2 ist Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen A_{ik}, $i < k$, von Wurffolgen $(z_1, z_2, \ldots, z_{18})$ mit $z_i = 6$, $z_k = 6$ und $z_j \leq 5$ für die übrigen Komponenten $j \neq i, k$.
Da es entsprechend der Anzahl von Binärvektoren der Länge 18 mit genau zwei Einsen insgesamt $\binom{18}{2} = 153$ Paare $i < k$ und damit Mengen A_{ik} gibt, ist $|B_2| = 153 \cdot 5^{16}$ und

$$\begin{aligned} p_3 &= 1 - P(B_0) - P(B_1) - p(B_2) \\ &= 1 - \frac{5^{18}}{6^{18}} - \frac{18 \cdot 5^{17}}{6^{18}} - \frac{153 \cdot 5^{16}}{6^{18}} \\ &\approx 0.5973456859 \end{aligned}$$

(Numerische Berechnungen mit Maple evalf()).

Lösung zu Aufgabe 8 wr008

Es gibt

$$\binom{8}{4} = 70$$

mögliche Verteilungen der vier Kugeln auf die acht Schubladen.
Dem Komplementärereignis $\overline{A}$, dass zwischen je zwei belegten Schubladen mindestens eine leere ist, entsprechen die fünf Kugelverteilungen
$\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 3, 5, 8\}$, $\{1, 3, 6, 8\}$, $\{1, 4, 6, 8\}$ und $\{2, 4, 6, 8\}$.
(Die Ziffern sind dabei die Nummern der belegten Schubladen).
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass es mindestens zwei benachbarte belegte Schubladen gibt, ist daher

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{70}$$

Lösung zu Aufgabe 9 wr009

Wenn die Schuhe von 1 bis 10 durchnummeriert werden, besteht das Zufallsexperiment im zufälligen Ziehen von vier verschiedenen Zahlen mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Dafür gibt es $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ Möglichkeiten. Das zum gefragten Ereignis A komplementäre $\overline{A}$, dass alle gezogenen Zahlen zu verschiedenen Schuhpaaren gehören, enthält $|\overline{A}| = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$ Elemente; denn ausser der gezogenen Zahl darf bei späteren Zügen auch die Nummer des anderen zum Paar gehörenden Schuhs nicht mehr erscheinen. Daraus ergibt sich

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = \frac{13}{21}$$

Lösung zu Aufgabe 10 wr010

Das viermalige Werfen eines regulären Würfels wird durch die Ergebnismenge

$$\Omega = \{\omega = (z_1, z_2, z_3, z_4)\ ;\ z_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

beschrieben, wo z_k für die Augenzahl steht, die beim k-ten Wurf erscheint. Dieses Experiment wird üblicherweise als Laplace-Experiment angesehen. Die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist $|\Omega| = 6^4 = 1296$.

a) Die Formulierung des Ereignisses beinhaltet nicht nur, dass die geworfenen Augenzahlen alle kleiner oder gleich 4 sind, sondern zusätzlich, dass die 4 wirklich mindestens ein Mal vorkommt.

Man kann sich natürlich eine Liste der *günstigen Fälle* aufstellen und die Anzahl durch Abzählen ermitteln. Abgesehen davon, dass man dabei jede Menge Abzählfehler machen kann, gibt es eine elegantere Methode. Die Menge A, die diesem Ereignis entspricht, entsteht dadurch, dass man aus der Menge

$$B_4 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4)\ ;\ z_k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

mit $|B_4| = 4^4 = 256$ Elementen die Elemente der Menge

$$B_3 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4)\ ;\ z_k \in \{1, 2, 3\}\}$$

entfernt, die solche Wurfserien repräsentieren, bei denen keine 4 geworfen wurde. Mit $|B_3| = 3^4 = 81$ ergibt sich

$$|A| = |B_4| - |B_3| = 175$$

und

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{175}{1296} \approx 0.1350$$

Als Rechenregel für Wahrscheinlichkeiten ergibt sich so nebenbei daraus: Ist $B \subset C$ so gilt für die **Differenzmenge**

$$A = C \setminus B = \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega \in C \text{ und } \omega \notin B\}$$

dass $P(A) = P(C) - P(B)$. Denn es ist $C = A + B$ und nach Axiom 3 daher $P(C) = P(A) + P(B)$.

b) Das Komplementärereignis $\overline{A}$ zum beschriebenen Ereignis A besteht darin, dass die kleinste geworfene Augenzahl größer als 4 ist oder — mit anderen Worten — dass nur Fünfen oder Sechsen fallen:

$$P(\overline{A}) = \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = \frac{2^4}{6^4} = \frac{16}{1296}$$

und damit

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{1280}{1296} \approx 0.9877$$

Lösung zu Aufgabe 11 wr011

Die Ergebnismenge des Experiments ist

$$\Omega = \{\omega = (z_1, z_2, \ldots, z_n); z_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

mit $|\Omega| = 6^n$ Elementen.

Das gesuchte Ereignis, das wir mit B bezeichnen wollen, erhält man dadurch, dass man aus der Menge aller Ergebnisse, bei denen nur Augenzahlen zwischen 2 und 5 auftreten, diejenigen Ergebnisse herausnimmt, bei denen die Augenzahl 2 oder die Augenzahl 5 oder beide nicht vorkommen.

Mit der Bezeichnung $A_{rs} = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \Omega; r \leq z_i \leq s\}$, wobei $|A_{rs}| = (s - r + 1)^n$, lässt sich das durch die Mengenbeziehung

$$A_{25} = B + (A_{24} \cup A_{35})$$

ausdrücken. Für die Wahrscheinlichkeiten heißt das

$$P(A_{25}) = P(B) + P(A_{24} \cup A_{35})$$

und wegen $P(A_{24} \cup A_{35}) = P(A_{24}) + P(A_{35}) - P(A_{24} \cap A_{35})$ sowie $A_{24} \cap A_{35} = A_{34}$ erhält man

$$P(B) = P(A_{25}) - P(A_{24}) - P(A_{35}) + P(A_{34}) = \frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$$

Lösung zu Aufgabe 12 wr012

Wir nehmen ein Laplace-Experiment mit der Ergebnismenge

$$\Omega = \{(z_1, z_2, z_3)\ ;\ z_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ \}$$

mit $6^3 = 216$ Elementen an.

Das Ereignis wird durch die Menge

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{(z_1, z_2, z_3) \in \Omega\ ;\ 1 \leq z_1 < z_2 < z_3 \leq 6\} \\ & & +\{(z_1, z_2, z_3) \in \Omega\ ;\ 6 \geq z_1 > z_2 > z_3 \geq 1\} \end{array}$$

beschrieben. Nach dem Vorlesungsabschnitt über Urnenmodelle enthält jede der beiden Mengen auf der rechten Seite genau so viele Elemente wie

$$A_3^{(6)} = \left\{ (\delta_1, \ldots, \delta_6)\ ;\ \delta_i \in \{0, 1\}\ ,\ \sum_{i=1}^{6} \delta_i = 3 \right\},$$

nämlich

$$|A| = \binom{6}{3} = 20$$

Also ist $P(A) = 2 \cdot \frac{20}{216}$.

Lösung zu Aufgabe 13 wr013

Die Ergebnismenge ist $\Omega = \{s_1, s_2, \ldots, s_6, k_1, k_2, \ldots, k_8\}$, wo s_i die Seiten des Würfels mit den Augenzahlen und k_j die abgeschliffenen Kanten repräsentieren. Wir nehmen an, dass alle Elementarereignisse zur σ-Algebra gehören und dass

$$P\{s_1\} = P\{s_2\} = \ldots = P\{s_6\} = p$$

$$P\{k_1\} = P\{k_2\} = \ldots = P\{k_8\} = \frac{p}{4}$$

Wegen $\sum_{i=1}^{6}\{s_i\} + \sum_{j=1}^{8}\{k_j\} = \Omega$ ist

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} P\{s_i\} + \sum_{j=1}^{8} P\{k_j\} = 6p + \frac{8}{4}p = 8p$$

oder

$$P\{s_6\} = p = \frac{1}{8}$$

Lösung zu Aufgabe 14 wr014

1. In lockerer Formulierung entspricht das beschriebene Experiment der Vorgehensweise beim Lotto: Das Ziehen aus der ersten Urne kann man als Ankreuzen von vier Zahlen auf einem Lottoschein mit 40 möglichen Ziffern ansehen. Danach werden die Lose in der zweiten Urne mit den angekreuzten Zahlen schwarz angestrichen und es geht dann um das Ereignis, dass beim Ziehen von vier Losen aus der zweiten Urne *wenigstens* ein schwarzes Los gezogen wird.
Das Komplementärereignis, kein schwarzes Los zu ziehen, hat die Wahrscheinlichkeit

$$q = \frac{\binom{4}{0}\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}} = \frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}$$

und das Ereignis selbst die Wahrscheinlichkeit$p = 1 - q$.

2. Um diese Formulierung dahingehend zu präzisieren, dass die erste Ziehung ja ebenfalls zufällig ist, führt man neben dem gesuchten Ereignis A noch die Ereignisse B_x ein, dass bei der Ziehung aus der ersten Urne die Losziffersätze $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ gezogen werden. Dann gilt nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_x P(A|B_x)P(B_x)$$

Die in 1. beschriebene Situation wird durch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(.|B_x)$ beschrieben, wobei x die schwarz markierten Lose bezeichnet. Da es sich um ein Laplace-Experiment handelt, hängt die Wahrscheinlichkeit nicht von der speziellen Auswahl ab. Es ist $P(A|B_x) = p$ für alle x. Da die Ereignisse B_x eine Partition bilden, ist $\sum_x P(B_x) = 1$ und daher

$$P(A) = p\sum_x P(B_x) = p$$

Lösung zu Aufgabe 15 wr015

Um die 40 Kugeln unterscheidbar zu machen, werden jeweils die 4 Kugeln, die die gleiche Ziffer tragen, noch zusätzlich mit Nummern $1, 2, 3, 4$ versehen. Eine Kugel wird dann durch ein Paar $k = (z, n)$ mit $z = 0, 1, 2, \ldots, 9$ und $n = 1, 2, 3, 4$ repräsentiert. Als Zufallsmechanismus haben wir Ziehen von 4 Kugeln ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge mit der Ergebnismenge

$$\Omega = \{\omega = (k_1, k_2, k_3, k_4)\ ;\ k_i = (z_i, n_i)\text{paarweise verschieden}\}$$

mit

$$|\Omega| = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37$$

Elementen.
Das Ereignis “Ziehen der Loszahl $s = s_1s_2s_3s_4$” entspricht der Menge A_s aller ω der Form

$$\omega = ((s_1, n_1), (s_2, n_2), (s_3, n_3), (s_4, n_4))$$

a) Die Menge A_{3494} enthält $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$ Elemente: 4 Möglichkeiten, eine Kugel mit Ziffer 3 zu ziehen, 4 für die 4, 4 für die Ziffer 9 und 3 Möglichkeiten, eine Ziffer 3 zu erhalten, wenn sie vorher schon einmal gezogen wurde.
b) Die Ziffern 1 und 7 müssen beide vorkommen. Die Menge der möglichen Loszahlen kan man daher in 3 Gruppen G_1, G_2 und G_3 einteilen, wo G_i die Menge aller Loszahlen ist, die aus i Einsen und aus $4 - i$ Siebenen besteht. Es gibt

$$|G_i| = \binom{4}{i}$$

verschiedene Loszahlen mit i Einsen und $4 - i$ Siebenen in der Menge G_i.
Die Anzahlen $|A_z|$ für die Loszahlen z aus den einzelnen G_i ergeben sich wie in Teil a) : Für $i = 1$ sind es $a_1 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, für $i = 2$ $a_2 = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$ und für $i = 3$ $a_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$ verschiedene Kugelkombinationen. Die in b) gesuchte Ereignismenge enthält also

$$|G_1| \cdot a_1 + |G_2| \cdot a_2 + |G_3| \cdot a_3$$

Elemente.
c) Es gibt $40 \cdot 36 \cdot 32 \cdot 28$ Möglichkeiten, 4 Kugeln mit verschiedenen Ziffern zu ziehen.

Lösung zu Aufgabe 16 wr016

Um die 70 Kugeln unterscheidbar zu machen, werden jeweils die 7 Kugeln, die die gleiche Ziffer tragen, noch zusätzlich mit Nummern $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ versehen. Eine Kugel wird dann durch ein Paar $k = (z, n)$ mit $z = 0, 1, 2, \ldots, 9$ und $n = 1, 2, \ldots, 7$ repräsentiert.
Als Zufallsmechanismus haben wir Ziehen von 7 Kugeln ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge mit der Ergebnismenge

$$\Omega = \{\omega = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_7) \; ; \; k_i = (z_i, n_i) \text{paarweise verschieden}\}$$

mit

$$|\Omega| = 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66 \cdot 65 \cdot 64 = 6041824588800$$

Elementen.
Das Ereignis “Ziehen der Loszahl $s = s_1s_2s_3s_4s_5s_6s_7$” entspricht der Menge A_s aller ω der Form

$$\omega = ((s_1, n_1), (s_2, n_2), (s_3, n_3), \ldots, (s_7, n_7))$$

Die Menge $A_{1111111}$ enthält $7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 7! = 5040$ Elemente: 7 Möglichkeiten, eine Kugel mit Ziffer 1 im ersten Zug zu ziehen, 6 für eine nochmalige 1 im zweiten Zug usw.
Die Menge $A_{1234567}$ enthält $7 \cdot 7 \cdots 7 = 7^7 = 823543$ Elemente, weil es für jeden Zug 7 Möglichkeiten gibt. Das Verhältnis der Gewinnchancen bei den entsprechenden Losen ist also

$$\frac{823543}{5040} \approx 163 : 1$$

Lösung zu Aufgabe 18 wr018

Wenn man—statt Schubladen zu malen—an die Stelle, an der zwei Schubladen aneinandergrenzen, einen Trennstrich malt, so lässt sich die Aufgabe offensichtlich so formulieren, dass nach der Anzahl der verschiedenen Anordnungen von $N-1$ Trennstrichen und K Kugeln gesucht wird. Setzt man für Trennstriche 0 und für Kugeln 1, so entspricht das der Mächtigkeit der Menge

$$A \;=\; \left\{ (\delta_1, \ldots, \delta_{N+K-1}) \;;\; \sum_{i=1}^{N+K-1} \delta_i \;=\; K \right\}$$

die bekanntermaßen

$$|A| \;=\; \binom{N+K-1}{K}$$

Elemente enthält.

Lösung zu Aufgabe 19 wr019

Wenn man die K Kugeln nacheinander in zufällig ausgewählte Schubladen legt, erhält man als Ergebnisse Vektoren

$$(n_1, n_2, \ldots, n_K)$$

wo n_k die Nummer der Schublade ist, in die die k-te Kugel gelegt wird. Wegen $n_k = 1, 2, \ldots, N$ gibt es N^K derartige Ergebnisse, die alle als gleich möglich angenommen werden.

Um zu zeigen, dass dieser Ansatz zu anderen Wahrscheinlichkeiten führt als der mit Laplace-Annahme bei Aufgabe 18, reicht es sich ein einfaches Beispiel zu überlegen. Bei $N = K = 3$ gibt es $3^3 = 27$ Möglichkeiten.

Das Ereignis, dass in jeder Schublade genau eine Kugel liegt, wird durch die Menge

$$A = \{(n_1, n_2, n_3) \;;\; \text{ist Permutation von } (1, 2, 3)\}$$

mit $|A| = 3! = 6$ Elementen beschrieben.

Das Ereignis, dass genau eine Schublade belegt ist, wird durch die Menge

$$B = \{(n, n, n) \;;\; n = 1, 2, 3\}$$

mit 3 Elementen beschrieben.

Die beiden Ereignisse haben hier unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten, bei einer Laplace-Verteilung in Aufgabe 18 wären sie gleich.

Lösung zu Aufgabe 21 wr021

Die zufällige Auswahl von n Personen aus den $N = 40$ Personen, von denen $K = 2$ Schmuggler sind, wird durch die hypergeometrische Verteilung mit der Ergebnismenge $\Omega = \{0, 1, 2\}$ für die Anzahl der ertappten Schmuggler und der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{40-2}{n-k}}{\binom{40}{n}}$$

beschrieben. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned}
P\{1,2\} &= f(1)+f(2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{38}{n-1}}{\binom{40}{n}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{38}{n-2}}{\binom{40}{n}} \\
&= \frac{n!(40-n)!}{40!}\left(\frac{2\cdot 38!}{(n-1)!(38-n+1)!} + \frac{38!}{(n-2)!(38-n+2)!}\right) \\
&= \frac{38!}{40!}\left(\frac{2\cdot n!(40-n)!}{(n-1)!(39-n)!} + \frac{n!(40-n)!}{(n-2)!(40-n)!}\right) \\
&= \frac{1}{39\cdot 40}\left(2n(40-n)+n(n-1)\right) \\
&= \frac{1}{39\cdot 40}\left(79n-n^2\right)
\end{aligned}$$

n ist so klein wie möglich zu bestimmen, so dass noch $P\{1,2\} \geq 0.9$ erfüllt ist. Es ist

$$\frac{1}{39\cdot 40}(79n-n^2) \geq \frac{9}{10}$$

genau dann, wenn

$$79n-n^2 \geq \frac{39\cdot 40\cdot 9}{10} = 1404$$

oder

$$n^2-79n+1404 \leq 0\ .$$

Die allgemeine Lösung (n reell) der entsprechenden quadratischen Gleichung ist

$$n_{1,2} = \frac{1}{2}\left(79 \pm \sqrt{79^2-4\cdot 1404}\right) = \frac{1}{2}\left(79\pm\sqrt{625}\right) = \frac{1}{2}(79\pm 25)$$

Im Bereich $0 \leq n \leq 40$ liegt

$$n_2 = \frac{1}{2}(79-25) = 27\ ,$$

praktischerweise gleich eine ganzzahlige Lösung.
Anmerkung: Anstelle von der Bedingung $P\{1,2\} \geq 0.9$ kann man auch die komplementäre Bedingung $P\{0\} \leq 0.1$ verwenden. Sie führt mit weniger Rechenaufwand zum selben Ergebnis.

2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Lösung zu Aufgabe 22 wr022

1. Bei Berücksichtigung der Reihenfolge ist das Experiment *Werfen von drei regulären Würfeln* ein Laplace-Experiment mit 6^3 Ergebnissen (w_1, w_2, w_3) und $w_i = 1, \ldots, 6$.

2. Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses $\overline{A_a}$, dass die Sechs nicht vertreten ist:

$$P(\overline{A_a}|B) = \frac{P(\overline{A_a}\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|\overline{A_a}\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|\overline{A_a}\cap B|}{|B|}$$

B ist die Menge der dreidimensionalen Vektoren mit paarweise verschiedenen Komponenten aus dem Bereich $1,\ldots,6$ mit $6{\cdot}5{\cdot}4$ Elementen. $\overline{A_a}\cap B$ ist die Menge der dreidimensionalen Vektoren mit paarweise verschiedenen Komponenten aus dem Bereich $1,\ldots,5$ mit $5\cdot 4\cdot 3$ Elementen. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}P(\overline{A_a}|B) &= \frac{1}{2}\\ P(A_a|B) &= 1-P(\overline{A_a}|B)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. Mit drei verschiedenen Zahlen aus dem Bereich $1\ldots 6$ kann man die Augensumme 8 nur durch die Kombinationen $(1,2,5)$ und $(1,3,4)$ und die jeweiligen Permutationen der drei Zahlen erreichen. Die Menge $A_b\cap B$ enthält daher 12 Elemente und es ist

$$P(A_b|B)=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$$

Lösung zu Aufgabe 23 wr023

Unter Berücksichtigung der Reihenfolge handelt es sich um ein Laplace-Experiment mit der Ergebnismenge

$$\Omega_n=\{(w_1,w_2,\ldots,w_n)\ ;\ w_k=1,2,\ldots,6\}$$

wobei w_k die beim k-ten Wurf erzielte Augenzahl ist. Ω_n enthält 6^n Elemente. Mit den Ereignissen

- A : Mehr als eine Sechs
- B : Mindestens eine Sechs
- $C=\overline{A}\cap B$: Genau eine Sechs.

ist

$$P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)=1-\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=1-\frac{P(C)}{1-P(\overline{B})}$$

$\overline{B}$ ist die Menge aller Vektoren $(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ mit Augenzahlen $1,2,,3,4,5$ und enthält daher 5^n Elemente.
C besteht aus allen Vektoren, die an genau einer der n Positionen eine Sechs und sonst nur Augenzahlen von 1 bis 5 enthalten. C besitzt daher $n5^{n-1}$ Elemente. Also

$$P(A|B)=1-\frac{\frac{n5^{n-1}}{6^n}}{1-\frac{5^n}{6^n}}=\frac{6^n-5^n-n5^{n-1}}{6^n-5^n}$$

Lösung zu Aufgabe 24 wr024

1. Das viermalige Werfen eines regulären Würfels wird normalerweise als ein Laplace-Experiment angesehen: $P(A)=|A|/|\Omega|$. Eine bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet man daher nach der Formel

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{|A\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|}=\frac{|A\cap B|}{|B|}$$

2. Das Ereignis „*Alle Augenzahlen sind verschieden*“ wird durch die Menge B aller Vektoren mit 4 verschiedenen Komponenten aus dem Bereich $1 \ldots 6$ repräsentiert und enthält nach Vorlesung („Ziehen ohne Zurücklegen bei Berücksichtigung der Reihenfolge“) eine Anzahl $|B| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ von Elementen.
3. Zur Bestimmung der Anzahl der Elemente der Menge $A \cap B$, die das Ereignis „*Alle Augenzahlen sind verschieden und die größte geworfene Augenzahl ist 5*“ kann man mindestens zwei Wege einschlagen:

1. $A \cap B$ besteht aus allen Vektoren aus der Menge B, an der an einer von 4 möglichen Positionen eine 5 steht und die restlichen drei Positionen durch drei verschiedene Zahlen aus dem Bereich $1 \ldots 4$ besetzt sind, wofür es $4 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten gibt. Insgesamt enthält $A \cap B$ daher $|A \cap B| = 4 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) = 96$ Elemente.

2. $A \cap B$ entsteht dadurch, dass aus der Menge aller Vektoren mit vier verschiedenen Zahlen aus dem Bereich $1 \ldots 5$ mit $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ Elementen die Menge mit vier verschiedenen Zahlen aus dem Bereich $1 \ldots 4$ herausgenommen wird und enthält damit $|A \cap B| = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) - (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 96$ Elemente.

4. Daraus folgt

$$P(A|B) = \frac{96}{360} = \frac{4}{15}$$

Lösung zu Aufgabe 25 wr025

Zu berechnen ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

mit den Ereignissen
A : Bei drei Würfen fällt wenigstens eine Drei, und
B : Bei drei Würfen fällt wenigstens eine Sechs.
Als Wahrscheinlichkeitsraum nehmen wir das übliche Laplace-Experiment mit 6^3 Ergebnissen an.
Das Komplement des Ereignisses B ist die Menge aller Würfe, bei denen keine Sechs fällt. Dafür gibt es 5^3 Möglichkeiten, so dass

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

Die Menge $A \cap B$ besteht aus allen Würfen mit 2 Sechsen und einer Drei:

$$(3, 6, 6), (6, 3, 6), (6, 6, 3)$$

allen Würfen mit einer Sechs und zwei Dreien:

$$(6, 3, 3), (3, 6, 3), (3, 3, 6)$$

sowie allen Würfen, die eine Permutation der drei Symbole 6, 3 und z bilden, wobei z eine der Ziffern 1, 2, 4 oder 5 ist. Bei 4 Möglichkeiten für z und $3! = 6$ Permutationen sind das 24 verschiedene Würfe.
Daraus ergibt sich $|A \cap B| = 30$, woraus

$$P(A|B) = \frac{30/216}{91/216} = \frac{30}{91}$$

folgt.

Lösung zu Aufgabe 27 wr027

Das Experiment besteht im zweimaligen Ziehen einer Münze aus einem Kasten, wobei die Münze entweder golden (g) oder silbern (s) ist. Als Ergebnisraum kann man aus dieser Sicht die Menge

$$\Omega = \{(g,g),(g,s),(s,g),(s,s)\}$$

ansetzen.

Die Ereignisse A, B, C für die Auswahl eines der der drei Kästen werden durch die Mengen $A = \{(g,g)\}$, $B = \{(g,s),(s,g)\}$ und $C = \{(s,s)\}$ repräsentiert, $G_1 = \{(g,g),(g,s)\}$ ist das Ereignis, im ersten Zug eine goldene Münze zu ziehen, und $G_2 = \{(g,g),(s,g)\}$ das entsprechende für den zweiten Zug.

Da $1 = P(\Omega) = P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)$ und jeder Kasten die gleiche Chance bei der Auswahl haben soll, ist

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

Da bei Auswahl des Kastens B jede der beiden Münzen die gleiche Chance haben dürfte, als erste gezogen zu werden, ist

$$P\{(s,g)\} = P\{(g,s)\} = \frac{1}{6}$$

anzusetzen.

Daraus ergibt sich

$$P(G_2|G_1) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1)} = \frac{P\{(g,g)\}}{P\{(g,g)\} + P\{(g,s)\}} = \frac{2}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 28 wr028

Zur Beantwortung beider Fragen benötigt man die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, die man über die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit mit der Partition $B + \overline{B} = \Omega$ erhält:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

Wegen $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ und $P(A|\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B})$ ist

$$P(A) = pb + (1-p)(1-b) = 1 - b - p(1-2b)$$

a) $P(A|B) = P(A)$ ist hier gleichbedeutend mit $p = 1 - b - p(1-2b)$ oder $p = 1/2$.

b)

$$P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)} = \ldots = \frac{5}{100}$$

Lösung zu Aufgabe 30 wr030

Zwei Ereignisse A, B sind nach Definition genau dann stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{1}$$

Ist $P(B) > 0$, so ist diese Gleichung äquivalent zu

$$P(A|B) = P(A) \tag{2}$$

Wenn das Ereignispaar A, B stochastisch unbhängig ist, dann auch das Paar $A, \overline{B}$. Ist $0 < P(B) < 1$, so ergibt (2), angewandt auf B und $\overline{B}$, dass A, B genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}) \tag{3}$$

Zur Lösung muss lediglich nachgerechnet werden, ob bei den angegebenen Zahlenwerten eine dieser Bedingungen erfüllt ist oder nicht. Am einfachsten geht das mit Hilfe von (3):

1. Es ist $P(A|C) = 0.5 \neq 0 = P(A|\overline{C})$, daher sind A und C **nicht** stochastisch unabhängig.
2. Wegen $P(B|C) = 1 - P(\overline{B}|C) = 0.6 = P(B|\overline{C})$ sind B und C stochastisch unabhängig.

Will man eines der anderen beiden Kriterien verwenden, so benötigt man die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$, die man aus der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit mit der Partition $C + \overline{C} = \Omega$ erhält:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A|C)P(C) + P(A|\overline{C})P(\overline{C}) \\
&= 0.15 \\
P(B) &= P(B|C)P(C) + P(B|\overline{C})P(\overline{C}) \\
&= (1 - P(\overline{B}|C))P(C) + P(B|\overline{C})(1 - P(C)) \\
&= 0.6
\end{aligned}$$

Für (1) muss man auch noch $P(A \cap C) = P(A|C)P(C)$ und $P(B \cap C) = P(B|C)P(C)$ berechnen, was aber bei bereits bei der totalen Wahrscheinlichkeit gebraucht wurde.

Lösung zu Aufgabe 31 wr031

Variante 1: Wir nummerieren die Personen durch. Jeder Ziehung entspricht ein Vektor $\omega = (\delta_1, \ldots, \delta_N)$; $\delta_i \in \{0, 1\}$, wobei $\delta_i = 1$ bedeutet, dass Person i einen „Ja“-Zettel gezogen hat, $\delta_i = 0$ bedeutet einen „Nein“-Zettel. Dann ist

$$\Omega = \left\{ (\delta_1, \ldots, \delta_N) \; ; \; \delta_i \in \{0, 1\} \; , \; \sum_{i=1}^{N} \delta_i = M \right\}$$

mit $|\Omega| = \binom{N}{M}$ Elementen.

Das Ereignis, dass Person Nr. k einen „Ja“-Zettel erhält, wird durch die Menge A_k aller Vektoren $\omega \in \Omega$ mit $\delta_k = 1$ beschrieben. Jedem solchen Vektor

$$\omega = (\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}, 1, \delta_{k+1}, \ldots, \delta_N)$$

entspricht ein Vektor $v = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{N-1}),\ \epsilon_i \in \{0,1\}$, der genau $M-1$ Einsen enthält. Also ist $|A_k| = \binom{N-1}{M-1}$.
Wenn man davon ausgeht, dass jede Zettelverteilung gleich möglich ist, gilt

$$P(A_k) = \frac{\binom{N-1}{M-1}}{\binom{N}{M}} = \frac{M}{N} \text{ für alle } k$$

Variante 2: A_k sei das Ereignis, dass Person k einen „Ja"-Zettel bekommt und X_k die Zufallsvariable „Anzahl der für die Personen $1 \ldots k-1$ gezogenen „Ja"-Zettel"

$$P(A_k) = \sum_{l=0}^{\min\{M,k-1\}} P\left(A_k \mid (X_k = l)\right) \cdot P(X_k = l).$$

Unter der Bedingung $(X_k = l)$ befinden sich noch $N-k+1$ Zettel in der Schachtel, davon sind $M-l$ „Ja"-Zettel.
Es wird zufällig ein Zettel gezogen, also:

$$P\left(A_k \mid (X_k = l)\right) = \frac{M-l}{M-k+1}$$

X_k besitzt eine hypergeometrische Verteilung: N Zettel (Kugeln), M davon „Ja" (d.h. schwarze Kugeln), $k-1$ werden gezogen:

$$\begin{aligned}
P(X_k = l) &= \frac{\binom{M}{l}\binom{N-M}{k-1-l}}{\binom{N}{k-1}} \\
P(A_k) &= \sum_{l=0}^{\min\{M,k-1\}} \frac{M-l}{N-k+1} \cdot \frac{\binom{M}{l}\binom{N-M}{k-1-l}}{\binom{N}{k-1}} \\
&= \sum_l \frac{M-l}{N-k+1} \frac{\frac{M!}{l!(M-l)!}\frac{(N-M)!}{(k-l-1)!(N-M-k+1+l)!}}{\frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!}} \\
&= \sum_l \frac{\frac{M!}{l!(M-l-1)!}\binom{N-M}{k-1-l}}{\frac{N!}{(k-1)!(N-k)!}} \\
&= \frac{M}{N}\sum_l \frac{\frac{(M-1)!}{l!(M-l-1)!}\binom{N-M}{k-1-l}}{\frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}} \\
&= \frac{M}{N}\underbrace{\sum_l \frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(k-1)-l}}{\binom{N-1}{k-1}}}_{=1} \\
&= \frac{M}{N}
\end{aligned}$$

wobei die letzte Summe als Summe aller Werte einer Wahrscheinlichkeitsfunktion gleich 1 ist.

Lösung zu Aufgabe 32 wr032

W_n (S_n) sei das Ereignis, dass im n-ten Zug eine weiße (schwarze) Kugel aus der betreffenden Urne gezogen wird, und es sei $p_n = P(W_n)$ und $q_n = P(S_n)$. Dann gilt nach der Beschreibung des Experiments:

$$P(W_{n+1}) = P(W_{n+1} \mid W_n)P(W_n) \ + \ P(W_{n+1} \mid S_n)P(S_n)$$

oder

$$p_{n+1} = \frac{w+1}{w+s+1}p_n \ + \ \frac{w}{w+s+1}q_n$$

und

$$q_{n+1} = P(\overline{W_{n+1}}) = 1 - p_{n+1}$$

Wegen $p_1 = \frac{w}{w+s}$ und $q_1 = \frac{s}{w+s}$ erhält man nach diesen Formeln $p_2 = p_1$ und $q_2 = q_1$ und dann durch iterative Anwendung $p_n = p_1$ und $q_n = q_1$ für alle n.

Lösung zu Aufgabe 33 wr033

S_i (W_i) sei das Ereignis, im i-ten Zug eine schwarze (weiße) Kugel zu ziehen. Gesucht ist $P(S_3)$.
Der Ansatz

$$P(S_3) = P(S_3|S_2)P(S_2) + P(S_3|W_2)P(W_2)$$

ist zwar korrekt, er hilft nur nicht weiter, da $P(S_3|S_2)$ und $P(S_3|W_2)$ nicht mittels eines Ersatzexperiments berechnet werden können. Wenn im zweiten Zug eine schwarze Kugel aus Urne 2 gezogen und in Urne 1 gelegt wird, dann hängt es nämlich noch vom ersten Zug ab, ob sich anschließend in Urne 1 s oder $s+1$ schwarze Kugeln befinden.
Aus diesem Grund muß man den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit mit der Partition

$$\begin{array}{ll} A_{ss} = S_2 \cap S_1 & A_{sw} = S_2 \cap W_1 \\ A_{ws} = W_2 \cap S_1 & A_{ww} = W_2 \cap W_1 \end{array}$$

anwenden:

$$P(S_3) = P(S_3|A_{ss})P(A_{ss}) + \cdots + P(S_3|A_{ww})P(A_{ww})$$

wobei $P(A_{sw}) = P(S_2 \cap W_1) = P(S_2|W_1)P(W_1)$ usw. Unter den Bedingungen A_{ij} liegt der Inhalt der Urne 1 vor dem dritten Zug eindeutig fest, z.B. enthält sie unter A_{ss} s schwarze und w weiße, unter A_{sw} $s+1$ schwarze und $w-1$ weiße Kugeln usw.

Lösung zu Aufgabe 35 wr035

Mit den Ereignissen
B_k: *k schwarze unter den sechs zuerst gezogenen Kugeln*
und
A: *Siebte gezogene Kugel ist schwarz*
sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$ mit

$$P(B_k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

Ausserdem ist

$$P(A|B_k) = \frac{6-k}{43},$$

denn nach sechs Zügen befinden sich in der Urne noch 43 Kugeln, wobei noch $6-k$ schwarz sind.

Lösung zu Aufgabe 36 wr036

Zur Beantwortung der Frage braucht man nicht unbedingt Wahrscheinlichkeitsrechnung, man kann das Ergebnis durch Häufigkeitsbetrachtung ermitteln. Wenn man 120-mal Kandidat war, hat man — bei zufälliger Auswahl einer Tür — in etwa 40 Fällen bei der ersten Entscheidung auf die Tür mit dem Auto und in etwa 80 Fällen auf eine mit einer Ziege gezeigt. Wenn man anschließend nicht umdisponiert, gewinnt man insgesamt also etwa 40 Autos.
Falls man umdisponiert, zeigt man beim zweiten Mal auf die Tür mit dem Auto, falls man ursprünglich eine mit einer Ziege ausgesucht hatte, und das ist 80-mal.
Ein passender Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus der Ergebnismenge

$$\Omega \;=\; \{(a, z1), (a, z2), (z1, z2), (z2, z1)\}$$

wobei in einem Ergebnis (k, s) die erste Komponente k die Wahl des Kandidaten und die zweite s die des Showmasters symbolisiert.
Als Ereignisalgebra nimmt man die Potenzmenge.
Interessante Ereignisse sind

$$K_a = \{(a, z1), (a, z2)\}$$

d.h. der Kandidat wählt die Tür mit dem Auto,

$$K_{z1} = \{(z1, z2)\}$$

und

$$K_{z2} = \{(z2, z1)\}$$

d.h. der Kandidat wählt eine Tür mit einer Ziege.
Für die Wahrscheinlichkeiten diese Ereignisse gilt offensichtlich

$$P(K_a) = P(K_{z1}) = P(K_{z2}) = \frac{1}{3}$$

Das Ereignis “Gewinn” ist bei der Strategie “ursprüngliche Wahl” durch die Menge

$$G = \{(a, z1), (a, z2)\} = K_a$$

mit der Wahrscheinlichkeit $P(G) = \frac{1}{3}$ und beim Umdisponieren durch

$$G = \{(z1, z2)), (z2, z1)\} = K_{z1} + K_{z2}$$

mit der Wahrscheinlichkeit $P(G) = \frac{2}{3}$ gegeben, wobei letzteres offensichtlich günstiger ist.

Lösung zu Aufgabe 37 wr037

Die Schlussfrage kann man auch so formulieren: Tür 3 ist offen und dahinter ist kein Auto. Wie groß ist unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tür 1 bzw. Tür 2 steht?
Man braucht zur Beantwortung dieser Frage die Ereignisse
A_i : *Das Auto steht hinter Tür i,* $i = 1, 2, 3$
und
B_k : *Kandidat Y wählt die Tür k,* $k = 1, 2, 3$
Als Ansatz für die Wahrscheinlichkeit P geht man von den folgenden Annahmen aus:

1. Das Auto wird von der Fernsehcrew *zufällig* hinter einer der Türen platziert: $P(A_i) = 1/3$.
2. Kandidat Y hat keinen Informanten bei der Fernsehcrew und daher sind die Ereignisse A_i und B_k jeweils stochastisch unabhängig.
3. Kandidat Y kann daher nur raten, er wählt *zufällig* eine Tür: $P(B_k) = 1/3$.

Wenn wir exemplarisch von der obigen Frage ausgehen, sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_1|B_3 \cap \overline{A_3})$ und $P(A_2|B_3 \cap \overline{A_3})$ mit dem Ereignis $B_3 \cap \overline{A_3}$: *Kandidat Y wählt Tür 3* ***und*** *das Auto ist* ***nicht*** *hinter Tür 3* gesucht. Wegen $\overline{A_3} = A_1 + A_2$ ist

$$
\begin{aligned}
P(A_1|B_3 \cap \overline{A_3}) &= \frac{P(A_1 \cap B_3 \cap \overline{A_3})}{P(B_3 \cap \overline{A_3})} \\
&= \frac{P(A_1 \cap B_3)}{P(A_1 \cap B_3 + A_2 \cap B_3)} \\
&= \frac{P(A_1)P(B_3)}{P(A_1)P(B_3) + P(A_2)P(B_3)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

und das Gleiche gilt für A_2 und alle weiteren Indexkombinationen. Es ist also aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht egal, ob man umdisponiert oder nicht.

Lösung zu Aufgabe 38 wr038

Mit $q = 1 - p$:

$$
\begin{aligned}
P(A_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A_k|B_n)P(B_n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \\
&= e^{-\mu} p^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} q^{n-k} \mu^n \frac{1}{n!} \\
&\ n! \text{ fällt raus, } m = n - k,\ n = m + k \\
&= e^{-\mu} p^k \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} q^m \mu^{m+k} \\
&= e^{-\mu} p^k \frac{1}{k!} \mu^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q\mu)^m}{m!} \\
&\ \text{Taylorreihe der Exponentialfunktion} \\
&= e^{-\mu} \frac{(p\mu)^k}{k!} e^{q\mu} \\
&= e^{-(1-q)\mu} \frac{(p\mu)^k}{k!} \\
&= e^{-p\mu} \frac{(p\mu)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 39 wr039

Man kann das Ganze als eine zweistufige Nachrichtenübertragung ansehen:

1. Am Anfang stehen die Alternativen, ob C gelogen (Ereignis C_1) oder die Wahrheit gesprochen hat (Ereignis $\overline{C_1}$).
2. B gibt weiter, was er weiss — er ist also der Übertragungskanal — und sagt, C habe gelogen (Ereignis C_2) oder C hat die Wahrheit gesprochen (Ereignis $\overline{C_2}$). Nachdem er selbst evtl. lügt, kann die Nachricht verfälscht sein: $P(C_2|C_1) = p$, $P(\overline{C_2}|C_1) = 1 - p$ usw.
3. A gibt weiter, was er von B gehört hat, ist also der nächste Übertragungskanal, der mit gewisser Wahrscheinlichkeit falsch überträgt und liefert die Aussagen: C hat gelogen (Ereignis C_3) oder C hat die Wahrheit gesprochen (Ereignis $\overline{C_3}$), wobei $P(C_3|C_2) = p$, $P(\overline{C_3}|C_2) = 1 - p$ usw.

Gesucht ist jetzt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(C_1|C_3)$.

$$P(C_1|C_3) = \frac{P(C_3|C_1)P(C_1)}{P(C_3|C_1)P(C_1) + P(C_3|\overline{C_1})P(\overline{C_1})}$$

$P(C_3|C_1)$ ist nicht bekannt. Um etwas rechnen zu können, muss man C_2 ins Spiel bringen:

$$\begin{aligned}
P(C_3|C_1) &= P(C_3 \cap C_2|C_1) + P(C_3 \cap \overline{C_2}|C_1) \\
&= \frac{P(C_3 \cap C_2 \cap C_1)}{P(C_1)} + \frac{P(C_3 \cap \overline{C_2} \cap C_1)}{P(C_1)} \\
&= \frac{P(C_3 \cap C_2 \cap C_1)}{P(C_2 \cap C_1)} \frac{P(C_2 \cap C_1)}{P(C_1)} + \frac{P(C_3 \cap \overline{C_2} \cap C_1)}{P(\overline{C_2} \cap C_1)} \frac{P(\overline{C_2} \cap C_1)}{P(C_1)} \\
&= P(C_3|C_2 \cap C_1)P(C_2|C_1) + P(C_3|\overline{C_2} \cap C_1)P(\overline{C_2}|C_1)
\end{aligned}$$

$P(C_3|C_2 \cap C_1)$ und $P(C_3|\overline{C_2} \cap C_1)$ sind auch nicht direkt gegeben. Wir nehmen an, dass A nichts über C weiss, sondern nur die Aussage von B kennt, so dass die Bedingung C_1 bzw. $\overline{C_1}$ für die bedingten Wahrscheinlichkeiten keine Rolle spielt:

$$\begin{aligned}
P(C_3|C_2 \cap C_1) &= P(C_3|C_2) \\
P(C_3|\overline{C_2} \cap C_1) &= P(C_3|\overline{C_2})
\end{aligned}$$

Damit ist

$$P(C_3|C_1) = P(C_3|C_2)P(C_2|C_1) + P(C_3|\overline{C_2})P(\overline{C_2}|C_1) = p \cdot p + (1 - p) \cdot (1 - p)$$

usw.

Lösung zu Aufgabe 40 wr040

1. Sind A, B stochastisch unabhängig, dann auch $A, \overline{B}$ und es gilt daher

$$P(A|B) = P(A) \text{ und } P(A|\overline{B}) = P(A)$$

woraus die obige Gleichung folgt.

2. Ist die Gleichung $P(A|B) = P(A|\overline{B})$ erfüllt, so ergibt sich durch Umformen die folgende Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\frac{P(A\cap B)}{P(B)} &= \frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\
P(A\cap B)P(\overline{B}) &= P(A\cap \overline{B})P(B) \\
P(A\cap B)\,(1-P(B)) &= (P(A)-P(A\cap B))\,P(B) \\
P(A\cap B)-P(A\cap B)P(B) &= P(A)P(B)-P(A\cap B)P(B) \\
P(A\cap B) &= P(A)P(B)
\end{aligned}$$

und damit die stochastische Unabhängigkeit.

2.3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Lösung zu Aufgabe 41 wr041

Variante 1: Momenterzeugende Funktion.

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(e^t)^n np^2q^{n-1} = p^2\sum_{n=1}^{\infty} n(e^tq)^{n-1}e^t = p^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dq}(e^tq)^n \\
&= p^2\frac{d}{dq}\sum_{n=0}^{\infty}(e^tq)^n = p^2\frac{d}{dq}\frac{1}{1-e^tq} = p^2\frac{e^t}{(1-e^tq)^2}
\end{aligned}$$

a) f ist Wahrscheinlichkeitsfunktion, denn offensichtlich ist $f(n) > 0$ für alle n und

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = M(0) = \frac{p^2}{(1-q)^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1$$

b) Die Ableitung der momenterzeugenden Funktion nach t ist

$$M'(t) = p^2\frac{e^t(1-e^tq)^2 + e^t2(1-e^tq)e^tq}{(1-e^tq)^4}$$

woraus man den Mittelwert

$$m_1 = M'(0) = p^2\frac{(1-q)^2+2(1-q)q}{(1-q)^4} = \ldots = 1+2\frac{q}{p}$$

erhält.

Variante 2: Berechnung der Reihen.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = p\left(\sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1}\right)$$

In der Klammer steht die Summe für den Mittelwert der geometrischen Verteilung mit dem in der Vorlesung berechneten Wert $1/p$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{p}{p} = 1$$

b)

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p^2 q^{n-1} = p^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) q^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n p^2 q^{n-1} \\
&= p^2 q \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) q^{n-2} + 1 = p^2 q \frac{d^2}{dq^2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n + 1 \\
&= p^2 q \frac{d^2}{dq^2} \frac{1}{1-q} + 1 = \frac{2p^2 q}{(1-q)^3} + 1 = 1 + 2\frac{q}{p}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 44 wr044

Wir definieren $\binom{n}{k} := 0$, falls $k > n$, so dass wir die Fallunterscheidung weglassen können. Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt

$$
P[(Y=k)|(X=n)] = \frac{P[(Y=k)\cap(X=n)]}{P(X=n)}
$$

außerdem gilt

$$
(Y=k) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [(Y=k)\cap(X=n)] = \sum_{n=0}^{\infty} [(Y=k)\cap(X=n)]
$$

und so erhält man

$$
\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P[(Y=k)\cap(X=n)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[(Y=k)|(X=n)] \cdot P(X=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \\
&= e^{-\mu} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}\mu^n}{(n-k)!} = e^{-\mu} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n \mu^{n+k}}{n!} \\
&= e^{-\mu} \frac{p^k}{k!} \mu^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-p)\mu)^n}{n!} = e^{-\mu} \frac{(p\mu)^k}{k!} e^{(1-p)\mu} \\
&= e^{-p\mu} \frac{(p\mu)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Y ist also Poisson-verteilt mit Parameter $p\mu$.

Lösung zu Aufgabe 45 wr045

Nach Definition der erzeugenden Funktion muß man die gegebene Funktion in eine Potenzreihe entwickeln. Der Koeffizient bei z^n ist dann der Wert $f(n)$ der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktion an der Stelle n. Mit der Taylorreihe der Exponentialfunktion erhält man im vorliegenden Fall

$$
e^{\lambda(z-1)} = e^{\lambda z - \lambda} = e^{\lambda z} e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right) z^n
$$

Die Funktion ist also die erzeugende Funktion der Poisson-Verteilung mit Parameter λ.

Lösung zu Aufgabe 47 wr047

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(k)$ zu

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{(2-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k$$

Eine Möglichkeit zu deren Bestimmung, die immer funktioniert, aber sehr arbeitsaufwendig sein kann, ist der Weg über die Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{f}^{(k)}(0)\, z^k \\ \Rightarrow \quad f(k) &= \frac{1}{k!} \hat{f}^{(k)}(0) \end{aligned}$$

Bei dieser erzeugenden Funktion ist es jedoch einfacher, das Problem auf die bekannte geometrische Reihe zurückzuführen, indem man den quadratischen Term im Nenner als Ableitung schreibt:

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= \frac{z}{(2-z)^2} \\ &= \frac{z}{2^2} \frac{1}{(1-\frac{z}{2})^2} \\ &= \frac{z}{4} \frac{d}{dz} \frac{2}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{z}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

Nun kann man für $z < 2$ die Formel für die geometrische Reihe anwenden:

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{2} \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k$$

Da man Summe und Ableitung vertauschen kann, erhält man so

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{2}\right)^k \\ &= \frac{z}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} k z^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} k z^k \end{aligned}$$

Man erhält also die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(k) = \frac{k}{2^{k+1}}$$

für alle k einschließlich 0, da $f(0) = 0$ gilt.

Die Berechnung des Mittelwerts erfolgt wieder über die momenterzeugende Funktion $M(t) = \hat{f}(e^t)$, für die gilt:

$$m_1 = M'(t)|_{t=0} = \hat{f}'(e^t)e^t|_{t=0} = \hat{f}'(1)$$

Über die erste Ableitung der erzeugenden Funktion

$$\hat{f}'(z) = \frac{(2-z)^2 - z \cdot 2(2-z)(-1)}{(2-z)^4} = \frac{(2-z)+2z}{(2-z)^3} = \frac{2+z}{(2-z)^3}$$

erhalten wir also den Mittelwert

$$m_1 = \hat{f}'(1) = 3$$

Lösung zu Aufgabe 48 wr048

$$\begin{aligned}
\hat{f}(z) &= \frac{1}{2}\frac{3+z}{3-z} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3-z} + z\frac{1}{3-z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{z}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} + \frac{z}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{3^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{3^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{3^m}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{3^m}z^m
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ und } f(m) = \left(\frac{1}{3}\right)^m \text{ für } m = 1, 2, \ldots$$

Den Mittelwert erhält man aus

$$\hat{f}'(z) = \frac{1}{2}\frac{(3-z)+(3+z)}{(3-z)^2} = \frac{3}{(3-z)^2}$$

zu

$$m_1 = \hat{f}'(1) = \frac{3}{4}$$

Die zweite Ableitung ist

$$\hat{f}''(z) = 3\frac{2(3-z)}{(3-z)^4} = \frac{6}{(3-z)^3}$$

so dass das zweite Moment

$$m_2 = \hat{f}''(1) + \hat{f}'(1) = \frac{6}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

und die Varianz

$$\hat{m}_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

Lösung zu Aufgabe 51 wr051

Es ist $Z(\omega) = n$ genau dann, wenn $X(\omega) = k$ und $Y(\omega) = n - k$ für irgendein $k = 0, 1, \ldots, n$. Also

$$\begin{aligned}
(Z = n) &= \{\omega \in \Omega\ ;\ Z(\omega) = n\} \\
&= \bigcup_{k=0}^{n} \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) = k\ \wedge\ Y(\omega) = n - k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) = k\ \wedge\ Y(\omega) = n - k\}
\end{aligned}$$

denn wenn ein ω in zwei dieser Mengen liegen würde, etwa mit den Indices $k' \neq k''$, dann müßte gleichzeitig $X(\omega) = k'$ und $X(\omega) = k''$ gelten, was unmöglich ist.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
& \{\omega\ ;\ X(\omega) = k\ \wedge\ Y(\omega) = n - k\} \\
= \ & \{\omega\ ;\ X(\omega) = k\} \cap \{\omega\ ;\ Y(\omega) = n - k\} \\
= \ & (X = k) \cap (Y = n - k).
\end{aligned}$$

Daraus folgt nach den Axiomen für Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
f^Z(n) &= P(Z = n) = P\left(\sum_{k=0}^{n} (X = k) \cap (Y = n - k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\big((X = k) \cap (Y = n - k)\big)
\end{aligned}$$

und wegen der Unabhängigkeit ist das gleich

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) \cdot P(Y = n - k) = \sum_{k=0}^{n} f^X(k) f^Y(n - k)$$

Lösung zu Aufgabe 52 wr052

1. Für zwei Zahlenfolgen $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$, deren Reihen absolut konvergieren, gilt die Cauchysche Summenformel

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= a_0 b_0 + \\
& \quad a_0 b_1 + a_1 b_0 + \\
& \quad a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \\
& \quad a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 + \\
& \quad . \\
& \quad . \\
& \quad . \\
&= a_0(b_0 + b_1 + \ldots) + a_1(b_0 + b_1 + \ldots) + \ldots \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)
\end{aligned}$$

2. Mit $a_k = f^X(k)z^k$ und $b_m = f^Y(m)z^m$ erhält man daraus

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k)\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f(k)z^k g(n-k)z^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} g(m)z^m\right) \\
&= \hat{f}(z)\hat{g}(z)
\end{aligned}$$

3. Sind X und Y Poisson-verteilt, so erhält man aus Aufgabe 45, dass

$$\hat{g}(z) = e^{\lambda(z-1)}e^{\mu(z-1)} = e^{(\lambda+\mu)(z-1)}$$

was bedeutet dass die Zufallsvariable Z wieder Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda + \mu$ ist.

Lösung zu Aufgabe 53 wr053

Die erzeugenden Funktionen für die Verteilungen der Zufallsvariablen X_k sind für alle k gleich:

$$\hat{f}_k(z) = f(0)z^0 + f(1)z^1 = q + pz$$

Mehrfache Anwendung der Formel aus Aufgabe 52 liefert für die erzeugende Funktion der Verteilung der Zufallsvariablen S

$$\widehat{f^S}(z) = \hat{f}_1(z) \cdot \hat{f}_2(z) \cdots \hat{f}_n(z) = (q + pz)^n$$

Um die Wahrscheinlichkeitsfunktion f^S zu erhalten, muss man die erzeugende Funktion in eine Potenzreihe entwickeln. Das geht hier ganz einfach mit der Binomialformel:

$$(q + pz)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k q^{n-k} == \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) z^k$$

Die Terme in runden Klammern sind dann die Werte $f^S(k)$ der Wahrscheinlichkeitsfunktion, in diesem Fall also der Binomialverteilung.

Lösung zu Aufgabe 54 wr054

Die geometrische Verteilung ist charakterisiert durch den Ergebnisraum $\mathbf{N}$, die σ-Algebra $2^{\mathbf{N}}$ und die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(n) = P_g\{n\} = pq^{n-1}$$

mit $q = 1 - p$.
Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Verteilung der Zufallsvariable Z, also

$$f^Z(n) = P^Z\{n\} = P(Z = n)$$

Anstelle der Ereignisse $(Z = n)$ betrachtet man beim Minimum von Zufallsvariablen besser $(Z \geq n)$, denn

$$\begin{aligned}
(Z \geq n) &= \{\omega\ ;\ Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)) \geq n\} \\
&= \{\omega\ ;\ X(\omega) \geq n\} \cap \{\omega\ ;\ Y(\omega) \geq n\} \\
&= (X \geq n) \cap (Y \geq n)\ ,
\end{aligned}$$

weil wegen der stochastischen Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$P(Z \geq n) = P\left((X \geq n) \cap (Y \geq n)\right) = P(X \geq n) P(Y \geq n)$$

Es ist

$$\begin{aligned}
P(X \geq n) &= P^X\{n, n+1, \ldots\} = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \\
&= p \sum_{k=n}^{\infty} q^{k-1} = pq^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{pq^{n-1}}{1-q} = q^{n-1}
\end{aligned}$$

und entsprechend

$$P(Y \geq n) = q^{n-1}$$

woraus

$$P(Z \geq n) = (q^2)^{n-1}$$

folgt. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion zu P^Z erhält man aus der Zerlegung

$$(Z \geq n + 1) + (Z = n) = (Z \geq n)$$

zu

$$\begin{aligned} f^Z(n) &= P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) \\ &= (q^2)^{n-1} - (q^2)^n = (1-q^2)(q^2)^{n-1} \end{aligned}$$

also die geometrische Verteilung mit Parameter $\hat{p} = 1 - q^2$.

Lösung zu Aufgabe 55 wr055

Es ist

$$f(k) = \frac{1}{1+a}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k = pq^k$$

wobei $0 < p < 1$ und $p + q = 1$. Daraus folgt, dass $f(k) \geq 0$ für alle k und

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = p\sum_{k=0}^{\infty} q^k = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1$$

f ist daher eine Wahrscheinlichkeitsfunktion. Die zugehörige Verteilung heißt die Pascal-Verteilung.

Die momenterzeugende Funktion ist

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt}pq^k = p\sum_{k=0}^{\infty} \left(qe^t\right)^k = p\frac{1}{1-qe^t}$$

und besitzt die Ableitungen

$$M'(t) = \frac{pqe^t}{(1-qe^t)^2}$$

und

$$M''(t) = \frac{pqe^t(1-qe^t)^2 + 2p(qe^t)^2(1-qe^t)}{(1-qe^t)^4}$$

mit

$$M'(0) = m_1 = \frac{q}{p} = a$$

und

$$M''(0) = m_2 = \frac{pq + 2q^2}{p^2} = a + 2a^2$$

Daraus ergibt sich die Varianz

$$\hat{m}_2 = m_2 - (m_1)^2 = a + a^2 = a(1+a)$$

Lösung zu Aufgabe 58 wr059

Die hypergeometrische Verteilung beschreibt das Experiment des Ziehens von Kugeln aus einer Urne ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit der Anzahl der schwarzen Kugeln unter den gezogenen als Ergebnissen. Wenn man von der Vermutung ausgeht, dass der Prozentsatz von schwarzen Kugeln unter den gezogenen in etwa dem Prozentsatz der schwarzen Kugeln in der Urne entspricht, dann müsste der Mittelwert gleich

$$\frac{K}{N}n$$

sein. Damit hat man schon ein Ziel, auf das man bei der Bearbeitung der Formel für den Mittelwert hinarbeiten kann.
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der hypergeometrischen Verteilung $\mathcal{H}(N,K,n)$ ist

$$f(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

für $k = 0, 1, \ldots, n$. Wegen der Konvention, dass Binmialkoeffizienten gleich Null sind, wenn die untere (natürliche) Zahl negativ oder größer als die obere ist, wird solchen Ergebnissen k, die aufgrund der Konstellation von N, K und n nicht möglich sind, automatisch der Wert $f(k) = 0$ zugewiesen, so dass man sich beim Umformen nicht darum zu kümmern braucht.

$$\begin{aligned}
m_1 &= \sum_{k=0}^{n} k f(k) = \sum_{k=1}^{n} k f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{\frac{K!}{k!(K-k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \binom{N-K}{n-k} \\
&= \frac{K}{N} n \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{(K-1)!}{(k-1)!(K-k)!}}{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}} \binom{N-K}{n-k}
\end{aligned}$$

Wegen $K-k = (K-1)-(k-1)$, $N-n = (N-1)-(n-1)$ usw. ist

$$m_1 = \frac{K}{N} n \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{K-1}{k-1}\binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

und mit der neuen Laufvariablen $m = k-1$ für die Summe

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{K}{N} n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{K-1}{m}\binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-m}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&=: \frac{K}{N} n \sum_{m=0}^{n-1} \hat{f}(m)
\end{aligned}$$

$\hat{f}$ ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion der $\mathcal{H}(N-1, K-1, n-1)$-Verteilung und da die wesentliche Eigenschaft einer Wahrscheinlichkeitsfunktion darin besteht, dass die Summe aller ihrer Werte gleich 1 ist, erhält man wie vermutet

$$m_1 = \frac{K}{N} n$$

Lösung zu Aufgabe 62 wr063

Das Spiel wird durch das Laplace-Experiment mit der 16-elementigen Ergebnismenge der Paare (i,k) mit $i,k = 1,2,3,4$ repräsentiert. Der (Netto-)Gewinn ist eine Zufallvariable G mit den Werten $4, -1, -2, -3$ und

$$\begin{aligned}
(G=4) &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \\
(G=-1) &= \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\} \\
(G=-2) &= \{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\} \\
(G=-3) &= \{(1,4),(4,1)\}
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert von G berechnet sich daher zu

$$\mathcal{E}G = 4 \cdot \frac{4}{16} + (-1) \cdot \frac{6}{16} + (-2) \cdot \frac{4}{16} + (-3) \cdot \frac{2}{16} = -\frac{4}{16}$$

Ist die Auszahlung im Fall gleicher Zahlen das Sechsfache des Einsatzes, so wird in diesem Fall $G = 5$ und $\mathcal{E}G = 0$.

Lösung zu Aufgabe 63 wr064

Das Werfen von n regulären Würfeln ist ein Laplace-Experiment mit der Ergebnismenge

$$\Omega_n = \{\omega = (w_1, w_2, \ldots, w_n)\ ;\ w_i \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

mit $|\Omega_n| = 6^n$ Elementen. Ist A_n die Menge der Ergebnisse $\omega = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, bei denen alle Augenzahlen $w_i \leq 5$ sind, so ist die Gewinnfunktion beim Werfen von n Würfeln gleich

$$G_n(\omega) = \begin{cases} w_1 + w_2 + \cdots + w_n & \text{falls} \quad \omega \in A_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Als Kriterium für die optimale Anzahl von Würfeln wählen wir den Erwartungswert

$$\begin{aligned} g_n = \mathcal{E}G_n &= \sum_{\omega \in \Omega} G_n(\omega) P_n\{\omega\} \\ &= \frac{1}{6^n} \sum_{\omega \in A_n} w_1 + w_2 + \cdots + w_n \qquad (4) \end{aligned}$$

Um eine Vorstellung von der Formel für die Zahl g_n zu bekommen, berechnen wir überschlagsweise den mittleren Gewinn pro Spiel bei der Durchführung von N Spielrunden. Dabei wird ungefähr bei

$$M = P(A_n)N = \frac{|A_n|}{|\Omega_n|}N = \left(\frac{5}{6}\right)^n N$$

Runden ein positiver Gewinn zu verzeichnen sein. Bei diesen M Runden wird insgesamt Mn-mal ein Würfel geworfen, wobei die fünf relevanten Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5$ etwa gleich oft, d.h. $Mn/5$-mal vertreten sind. Die Gesamtsumme der geworfenen Augenzahlen ist daher

$$\frac{Mn}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3n \left(\frac{5}{6}\right)^n N$$

und die mittlere Augenzahlsumme pro Runde gleich

$$\tilde{g}_n = 3n \left(\frac{5}{6}\right)^n \qquad (5)$$

Durch vollständige Induktion nach n kann man leicht beweisen, dass die Summe (4) genau diesen Wert (5) besitzt.

Zur Bestimmung der Maximalstelle der Funktion (5) betrachten wir die Quotienten

$$q_n = \frac{\tilde{g}_{n+1}}{\tilde{g}_n}$$

Es ist $q_n > 1$ für $n < 5$, $q_n < 1$ für $n > 5$ und $q_5 = 1$, so dass die Anzahlen $n = 5 = 6$ die Maximalstellen sind.

2.4 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Lösung zu Aufgabe 64 wr065

Denkt man sich die Münze in eine dicht abschließende Kugel eingepackt, so würde die Münze dann auf dem Rand stehen bleiben, wenn der Auftreffpunkt der Kugel auf dem Boden zwischen den beiden Kreisen liegt, in denen die Münze die Kugeloberfläche berührt.
Wenn beim Wurf der Münze bzw. der Kugel jeder Punkt auf der Kugeloberfläche die gleiche Chance hat, der Auftreffpunkt auf den Boden zu sein, so ist das passende Wahrscheinlichkeitsgesetz die uniforme Verteilung auf der Kugeloberfläche. Damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze auf den Rand oder eine der beiden Seiten fällt, jeweils $1/3$ ist, muß die Münze so proportioniert sein, dass bei der umhüllenden Kugel die Fläche zwischen den beiden Berührkreisen und — aus Symmetriegründen — die Fläche der beiden Kugelkappen, die durch die Berührkreise festgelegt werden, jeweils ein Drittel der Kugeloberfläche ausmacht.
Ist R der Radius der Hüllkugel, r der Radius der Münze und d die halbe Dicke der Münze, so ersieht man aus Abbildung 1, dass

$$R^2 = r^2 + d^2 \tag{6}$$

Nach *Bronstein, Taschenbuch der Mathematik, Abschnitt 2.6.2.4* ist die Fläche der Kugelkappe gleich

$$F = 2\pi R(R - d)$$

und das Verhältnis von F und der Kugeloberfläche O gleich

$$\frac{F}{O} = \frac{2\pi R(R-d)}{4\pi R^2} = \frac{R-d}{2R} = \frac{1}{3}$$

genau dann, wenn $R = 3d$.
Eingesetzt in (6) ergibt das für die Proportionen der Münze das Verhältnis

$$\frac{\text{Dicke}}{\text{Durchmesser}} = \frac{d}{r} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Lösung zu Aufgabe 65 wr066

Die zufällige Auswahl eines Paars (x_1, x_2) von Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ wird durch die uniforme Verteilung auf der Menge

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2\ ;\ 0 \le x_i \le 1\}$$

beschrieben. Die Mengen

$$A = \{(x_1, x_2) \in M\ ;\ \min(x_1, x_2) \le \frac{1}{4}\} = \{(x_1, x_2) \in M\ ;\ x_1 \le \frac{1}{4} \text{ oder } x_2 \le \frac{1}{4}\}$$

und

$$B = \{(x_1, x_2) \in M\ ;\ \max(x_1, x_2) \ge \frac{1}{2}\} = \{(x_1, x_2) \in M\ ;\ x_1 \ge \frac{1}{2} \text{ oder } x_2 \ge \frac{1}{2}\}$$

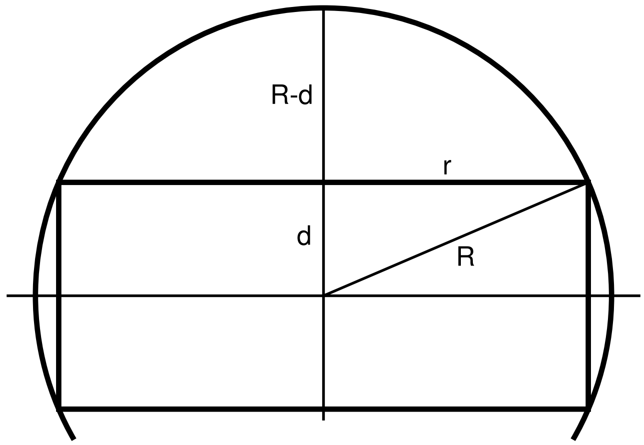


Abbildung 1: Das Münzenproblem

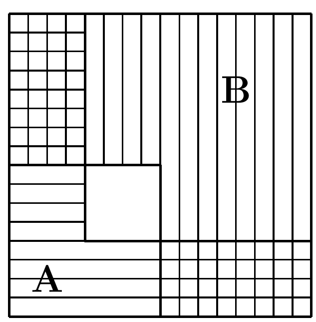


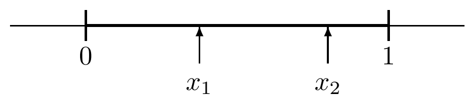
Abbildung 2: Zu Aufgabe 65

sind in der Abbildung 2 quer bzw. längs schraffiert dargestellt. Daraus ersieht man sofort, dass

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 66 wr067

Nimmt man einen Stab der Länge 1, so kann man wie in der nebenstehenden Abbildung die beiden Knickstellen durch zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ repräsentieren.



Zufälliges Brechen entspricht dann der uniformen Verteilung auf der Menge

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \; ; \; 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}$$

wie sie in der Skizze unten dargestellt ist.
Aus den drei Bruchstücken läßt sich ein Dreieck immer dann formen, wenn die Summe der Längen von je zwei Bruchstücken mindestens so groß ist wie die Länge des verbleibenden Stücks. Für die Koordinaten der beiden Knickstellen bedeutet das, dass die drei Ungleichungen

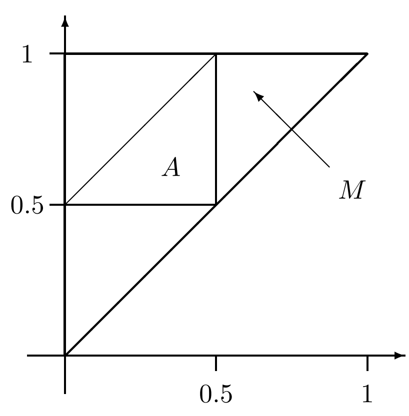
$$x_1 \leq 1 - x_1 \quad , \quad 1 - x_2 \leq x_2 \quad , \quad x_2 - x_1 \leq x_1 + (1 - x_2)$$

beziehungsweise

$$x_1 \leq \tfrac{1}{2} \quad , \quad x_2 \geq \tfrac{1}{2} \quad , \quad x_2 \leq \tfrac{1}{2} + x_1$$

erfüllt sein müssen.
Die Menge A der Paare (x_1, x_2), die diese Bedingungen erfüllen, ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Man sieht direkt aus dieser Skizze, dass

$$P(A) = \frac{|A|}{|M|} = \frac{1}{4}$$



Lösung zu Aufgabe 67 wr068

Im Gegensatz zur Aufgabe 67 werden die Knickstellen hier nicht gleichzeitig und unabhängig voneinander ausgewählt, sondern in einem zweistufigen Verfahren, bei dem die Auswahl der zweiten Knickstelle von der der ersten abhängt. Wenn man aus Symmetriegründen annimmt, dass das längere Stück das rechte ist, so erfolgt die Auswahl der ersten Knickstelle x_1 gemäß der uniformen Verteilung im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$, d.h. mit der Dichte

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad 0 \le x_1 \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und — bei gegebenem x_1 — die Auswahl der zweiten Knickstelle x_2 nach der uniformen Verteilung im Intervall $[x_1, 1]$ mit der Dichte

$$f_2(x_2|x_1) = \begin{cases} \frac{1}{1-x_1} & \text{falls} \quad x_1 \le x_2 \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Dichte für das Gesamtexperiment ist dann nach Vorlesung $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2|x_1)$. Die Menge A der Paare (x_1, x_2), bei denen man ein Dreieck bilden kann, ist die gleiche wie in der vorhergehenden Aufgaben. Ihre Wahrscheinlichkeit ist hier

$$\begin{aligned} P(A) &= \int !_A(x_1, x_2) f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+x_1} \frac{2}{1-x_1}\, dx_2 \right) dx_1 \\ &= 2\log(2) - 1 \end{aligned}$$

2.5 Verteilungsfunktionen und Dichten

Lösung zu Aufgabe 68 wr069

Es muss $\alpha \neq \beta$ sein, damit der Nenner $\alpha - \beta$ von Null verschieden ist, sowie $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, damit die Exponentialfunktionen integrierbar sind.
Damit ist f bereits eine Dichte:
1) Da die Funktion $t \longmapsto e^{-tx}$ bei $x > 0$ in t monoton fällt, ist $e^{-\beta x} < e^{-\alpha x}$ genau dann, wenn $\beta > \alpha$, so dass der Term

$$\frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}}{\alpha - \beta}$$

und damit $f(x)$ für $x > 0$ stets positiv ist.
2)

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \int_0^\infty \left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right) dx \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \int_0^\infty \beta e^{-\beta x} dx - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{\beta}{\alpha-\beta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 69 wr070

$$\int f(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)\,dx = \frac{c}{6} = 1$$

für $c = 6$.

$$m_1 = \int xf(x)\,dx = \int_0^1 6x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$m_2 = \int x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 6x^3(1-x)\,dx = \frac{6}{20}$$

$$\hat{m}_2 = m_2 - (m_1)^2 = \frac{1}{20}$$

Lösung zu Aufgabe 70 wr071

Die Variablensubstitutionen $y = x - \beta$ und $s = y/\alpha$ ergeben

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{\alpha^2 + y^2}\,dy = \frac{c}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{c}{\alpha}(arctan(\infty) - arctan(-\infty)) = \frac{c}{\alpha}\pi\end{aligned}$$

und damit $c = \frac{\alpha}{\pi}$.

Für den Mittelwert müsste z.B. im Fall $\alpha = 1$ und $\beta = 0$

$$xf(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}$$

mit der Stammfunktion

$$\frac{1}{2\pi}\log(1+x^2)$$

integriert werden. Da die Stammfunktion für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ unbeschränkt wächst, existiert dieses Integral nicht. Es gibt keinen Mittelwert und damit auch keine Varianz.

Lösung zu Aufgabe 71 wr072

Die Funktion

$$F_a(t) = e^{-e^a e^{-t}}$$

ist für alle t differenzierbar mit der Ableitung

$$f_a(t) = F_a{}'(t) = e^a e^{-t} e^{-e^a e^{-t}} = e^{-(t-a)} e^{-e^{-(t-a)}}$$

Sie ist also insbesondere stetig und wegen $f_a(t) > 0$ monoton steigend.

Für $t \to \infty$ konvergiert $s = e^{-t}$ gegen Null und damit $F_a(t) = e^{-e^a s}$ gegen 1.

Für $t \to -\infty$ konvergiert $s = e^{-t}$ gegen ∞ und damit $F_a(t) = e^{-e^a s}$ gegen 0.

F_a besitzt also alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion und f_a ist die zugehörige Dichte.

Für den Mittelwert dieser Verteilung erhält man

$$m_1 = \int tf_a(t)\,dt = \int (t-a)f_a(t)\,dt + a\int f_a(t)\,dt = \int se^s e^{-e^{-s}}\,ds + a$$

wobei beim ersten Summanden die Substitution $s = t - a$ angewandt und beim zweiten die Tatsache verwendet wurde, dass das Integral über eine Dichte stets 1 ist.
Durch die Variablensubstitution $x = e^{-s}$ mit $s = -\ln(x)$ und $\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{x}$ erhält man für das verbleibende Integral bei Berechnung als uneigentliches Riemannsches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} se^{s}e^{-e^{-s}}\,ds = \int_{\infty}^{0}(-\ln(x))xe^{-x} - \frac{1}{x}\,dx = -\int_{0}^{\infty}\ln(x)e^{-x}\,dx$$

Laut Integraltafel (z.B. Bronstein) ist dies die Eulersche Konstante γ. Also $m_1 = \gamma + a$.

Lösung zu Aufgabe 72 wr073

Die Funktion G_β ist differenzierbar und ihre Ableitung

$$g_\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{t}{\beta^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\beta}\right)^2} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

ist nichtnegativ. Daraus folgt, dass G_β stetig und monoton nichtfallend ist. Offensichtlich gilt $\lim_{t\to\infty} G_\beta(t) = 1$ und $\lim_{t\to-\infty} G_\beta(t) = 0$.
g_β ist die Dichte dieser Verteilung (Rayleigh-Verteilung).
Für das erste Moment dieser Verteilung erhält man

$$m_1 = \int tg_\beta(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{t^2}{\beta^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}\,dt$$

Substitution von $s = t/\beta$ mit $\frac{ds}{dt} = \beta$ ergibt

$$m_1 = \beta\int_0^\infty s^2e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds$$

Da der Integrand eine gerade Funktion ist, ergibt sich schließlich — vgl. die Berechnung des zweiten Moments der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung in der Vorlesung —

$$m_1 = \beta\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty s^2e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds = \beta\frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \beta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Zur Berechnung des zweiten Moments benutzt man partielle Integration:

$$\begin{aligned} m_2 &= \int t^2g_\beta(t)\,dt = \int_0^\infty t^2\left(\frac{t}{\beta^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}\right)dt \\ &= \left[t^2\left(-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2t\left(-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}\right)dt \\ &= 0 + 2\beta^2\int_0^\infty \frac{t^2}{\beta^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}\,dt \end{aligned}$$

$$= 2\beta^2\int g_\beta(t)\,dt = 2\beta^2$$

Die Varianz ergibt sich schließlich aus der Formel $\hat{m}_2 = m_2 - m_1^2$.

Lösung zu Aufgabe 73 wr074

Die Funktionen $f_n(t)$ sind Dichten und haben daher für alle $n \in \mathbf{N}$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} f_n(t) &\geq 0 \qquad \text{für fast alle } t \\ \int f_n(t)dt &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Wir berechnen nun den Mittelwert der zugehörigen Verteilungen:

$$\begin{aligned} m_1(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} t f_n(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} t \cdot \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n+1} t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{n}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{n}{\lambda} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} f_{n+1}(t)dt}_{=1 \text{ wegen } (7)} \\ &= \frac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

2.6 Zufallsvariablen

Lösung zu Aufgabe 76 wr077

Die $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung besitzt die Dichte

$$\varphi(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Ihre Verteilungsfunktion wird üblicherweise mit Φ bezeichnet:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s)\, \mathrm{d}s$$

Die Verteilungsfunktion F^X der Verteilung von X berechnet sich aus

$$F^X(t) = P^X(-\infty, t] = P(X \leq t) = P\{s \in \mathbf{R}; X(s) \leq t\}$$

Wie man sich anhand des Graphen der Funktion $X(s)$ leicht überzeugt, muss man die Fälle $a < 0$ und $a > 0$ unterscheiden. Bei $a > 0$ ist $as + b \leq t$, wenn $s \leq \frac{t-b}{a}$, und bei $a < 0$ gilt diese Ungleichung, wenn $s \geq \frac{t-b}{a}$.

$a > 0$ Die Verteilungsfunktion ist

$$F^X(t) = P(-\infty, \frac{t-b}{a}] = \Phi(\frac{t-b}{a})$$

und die Dichte als Ableitung von F^X

$$f^X(t) = \varphi(\frac{t-b}{a})\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-\frac{1}{2a^2}(t-b)^2}$$

$a < 0$ Wegen der Stetigkeit der Verteilungsfunktion Φ ist

$$P(-\infty, y) = \lim_{x \nearrow y} \Phi(x) = \Phi(y)$$

und daher

$$F^X(t) = P[\frac{t-b}{a}, \infty) = 1 - P(-\infty, \frac{t-b}{a}) = 1 - \Phi(\frac{t-b}{a})$$

mit der Dichte

$$f^X(t) = -\varphi(\frac{t-b}{a})\frac{1}{a} = \varphi(\frac{t-b}{a})\frac{1}{-a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-\frac{1}{2a^2}(t-b)^2}$$

Die Dichte hat also in jedem Fall die gleiche Gestalt.

Lösung zu Aufgabe 77 wr078

Die $\mathcal{E}(\lambda)$-Verteilung besitzt die (stetige) Verteilungsfunktion $F(s) = 1 - e^{-\lambda s}$ für $s > 0$ und $F(s) = 0$ für $s \leq 0$. Die Verteilungsfunktion $F^X(t)$ der Verteilung von X ergibt sich demgemäß zu

$$\begin{aligned} F^X(t) &= P^X(-\infty, t] = P(X \leq t) = P\{s \in \mathbf{R}; X(s) \leq t\} \\ &= P\{s \leq 0; X(s) \leq t\} + P\{s > 0; -\log(s) \leq t\} \\ &= 0 + P[e^{-t}, \infty) = 1 - P(-\infty, e^{-t}) \end{aligned}$$

Da die Verteilungsfunktion F stetig ist, gilt

$$P(-\infty, e^{-t}) = F(e^{-t} - 0) = F(e^{-t}) = 1 - e^{-\lambda e^{-t}}$$

und damit

$$F^X(t) = e^{-\lambda e^{-t}}$$

Lösung zu Aufgabe 80 wr081

Variante 1: Direkte Berechnung der Verteilungsfunktion $F^Y(t) = P(Y \leq t)$ mit

$$(Y \leq t) = \{\omega \mid Y(\omega) \leq t\} = \{\omega \mid \mathrm{e}^{-X(\omega)} \leq t\}$$

a) Da $e^{-X(\omega)}$ immer positiv ist, gilt für $t \leq 0$, dass $(Y \leq t) = \emptyset$ und damit $F^Y(t) = 0$.
b) Für positive t gilt

$$\mathrm{e}^{-X(\omega)} \leq t \Leftrightarrow -X(\omega) \leq \ln(t) \Leftrightarrow X(\omega) \geq -\ln(t)$$

oder

$$(Y \leq t) = (X \geq -\ln(t))$$

woraus man

$$
\begin{aligned}
F^Y(t) &= P(Y \le t) = P(X \ge -\ln(t)) = 1 - P(X < -\ln(t)) \\
&= 1 - F(-\ln(t)) = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{e}^{2\ln(t)}\right)} = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{e}^{\ln(t^2)}\right)} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-t^2}
\end{aligned}
$$

erhält.

Variante 2: Anwendung des Transformationssatzes mit der Funktion $G(x) = e^{-x}$. Die Dichte

$$f(x) = F'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} F(x)$$

ist positiv auf der Menge $M = \mathbf{R}^1$ und M wird durch G auf $M^* = (0, \infty)$ abgebildet. Die Funktional-„Determinante“ ist

$$J_G(x) = \frac{d}{dx} G(x) = -e^{-x}$$

und die Umkehrabbildung $x = G^*(y) = -\ln(y)$.
Als Dichte g der Zufallsvariablen Y erhält man daher nach dem Transformationsssatz $g(y) = 0$ für $y \le 0$ und

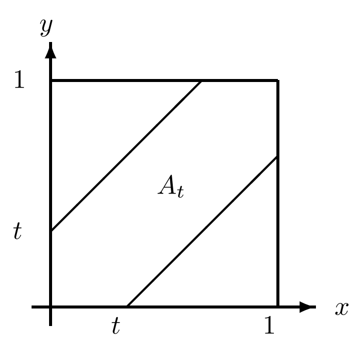
$$
\begin{aligned}
g(y) &= f(G^*(y)) \frac{1}{|J_G(G^*(y))|} = 2\mathrm{e}^{2\ln(y)} F(-\ln(y)) \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(y)}} \\
&= 2y^2 \mathrm{e}^{-y^2} \frac{1}{y} = 2y\mathrm{e}^{-y^2}
\end{aligned}
$$

für positive y mit der Verteilungsfunktion

$$F^Y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(y)dy = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-t^2} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 83 wr084

Das Experiment mit den Ergebnissen (x, y) wird durch die uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat des $\mathbf{R}^2$ beschrieben und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass der Abstand höchstens t beträgt, ist—s. Vorlesung, Abschnitt über geometrische Wahrscheinlichkeiten—gleich der Fläche der Menge A_t in der nebenstehenden Skizze oder gleich der Fläche des Einheitsquadrats minus der Flächen der beiden restlichen Dreiecke, was



$$P(A_t) = 1 - 2\frac{(1-t)^2}{2} = 1 - (1-t)^2 = 2t - t^2$$

ergibt.

Die Verteilungsfunktion $F^Z(t) = P(Z \le t)$ ist gleich Null für $t \le 0$ und gleich Eins für $t > 1$, da es keine negativen Abstände gibt und da der Abstand mit

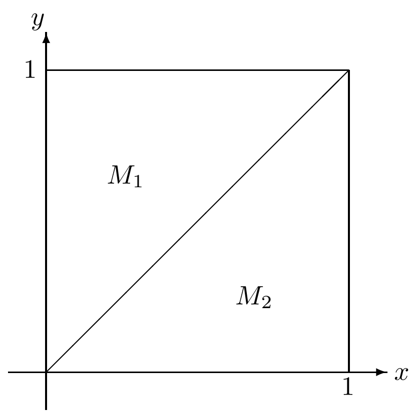
Wahrscheinlichkeit 1 stets kleiner oder gleich 1 ist. Für $0 < t \leq 1$ ist $F^Z(t) = P(A_t) = 2t - t^2$.
Durch Ableiten erhält man die Dichte der Verteilung zu

$$f^Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ 2(1-t) & \text{falls } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{falls } t \geq 1 \end{cases}$$

und den Mittelwert

$$m_1(P^Z) = \int t f^Z(t)\, dt = \int_0^1 2t(1-t)\, dt = \frac{1}{3}$$

Wer sich ohne Rücksicht auf das Ergebnis von Aufgabenteil a das Leben besonders schwer machen will, der berechnet die Dichte f^Z über den Transformationssatz für Dichten. Da die Funktion $Z(x, y)$ aber bei $x = y$ nicht differenzierbar ist, muß man den $\mathbf{R}^2$ — wie in der nächsten Zeichnung dargestellt — in die Mengen



$$M_1 = \{(x, y); 0 < x < y < 1\},$$
$$M_2 = \{(x, y); 0 < y < x < 1\}$$

und eine Restmenge N zerlegen. Auf M_1 benutzt man die Transformation G_1:

$$z_1 = y - x = Z(x, y)$$
$$z_2 = y$$

mit $J_{G_1} = -1$ und auf M_2 die Abbildung G_2 mit

$$z_1 = x - y = Z(x, y)$$
$$z_2 = x$$

und $J_{G_2} = 1$.
Die Bildbereiche sind

$$M_1^* = M_2^* = M^* = \{(z_1, z_2); 0 < z_2 < 1 \text{ und } 0 < z_1 < z_2\}$$

und $f(G_i^*(z_1,z_2) = 1$. Als Dichte des Zufallsvektors (Z_1,Z_2) ergibt sich daher

$$g(z_1,z_2) = 1 \cdot 1_{M_1^*}(z_1,z_2) + 1 \cdot 1_{M_2^*}(z_1,z_2) = 2 \cdot 1_{M^*}(z_1,z_2)$$

und als erste Marginaldichte für $0 < z_1 < 1$

$$g_1(z_1) = \int g(z_1,z_2)dz_2 = \int_{z_1}^1 2dz_2 = 2(1-z_1)$$

2.7 Mehrdimensionale Verteilungen

Lösung zu Aufgabe 85 wr086

1. Da die Dichte $f(x,y)$ für nichtpositive x oder y gleich Null ist, sind es auch die Marginaldichten $f_1(x)$ und $f_2(y)$. Für positive x bzw. y erhält man

2.
$$f_1(x) = \int_0^\infty xe^{-x(1+y)}\,dy = e^{-x}\int_0^\infty xe^{-xy}\,dy = e^{-x}$$

denn der letzte Integrand ist die Dichte der $\mathcal{E}(x)$-Verteilung.
Die 1. Marginaldichte f_1 ist die Dichte der $\mathcal{E}(1)$-Verteilung mit dem Mittelwert 1.

3.

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_0^\infty xe^{-x(1+y)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y}\int_0^\infty x(1+y)e^{-(1+y)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1+y}\frac{1}{1+y} = \frac{1}{(1+y)^2} \end{aligned}$$

denn das letzte Integral ist die Formel für den Mittelwert der $\mathcal{E}(1+y)$-Verteilung. Da $\frac{y}{(1+y)^2}$ über den Bereich $(0,\infty)$ nicht integrierbar ist, besitzt die Verteilung mit der Dichte f_2 keinen Mittelwert (bzw. er ist ∞).

Lösung zu Aufgabe 86 wr087

1. Die Menge M ist die Menge aller Vektoren (x,y) mit

$$\begin{array}{lll} 0 \le x \le 1 & \text{und} & 0 \le y \le x \\ \text{oder} & & \\ 1 < x \le 2 & \text{und} & 0 \le y \le 2-x \end{array}$$

2. Die Marginaldichten ergeben sich daher—mit vorerst noch offenem Parameter c—gemäß den Formeln $f_1(x) = \int f(x,y)dy$ und $f_2(y) = \int f(x,y)dx$ zu

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & & & \text{für } x<0 \text{ und } x>2 \\ \int_0^x cy\,dy & = & c\frac{x^2}{2} & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ \int_0^{2-x} cy\,dy & = & c\frac{(2-x)^2}{2} & \text{für } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

und

$$f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y<0 \text{ und } y>1 \\ \int_y^{2-y} cy\,dx = cy(2-y-y) = 2c(y-y^2) & \text{für } 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

3. Den Parameter c erhält man aus der Bedingung

$$\begin{aligned} 1 &= \int f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int f_2(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2c(y-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}c \end{aligned}$$

Es muss also $c = 3$ gewählt werden und damit ist auch $f(x,y) \geq 0$

Lösung zu Aufgabe 87 w1068

Die zweite Marginaldichte $f_2(x_2) = \int f(x_1, x_2)\,dx_1$ ist Null für $x_2 \leq 0$, denn für diese Werte ist der Integrand stets Null. Bei positivem x_2 ist $f(x_1, x_2) > 0$ für $x_1 > x_2$ und man erhält

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \int_{x_2}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1 = ce^{-3x_2} \int_{x_2}^{\infty} e^{-2x_1}\,dx_1 \\ &= ce^{-3x_2}\frac{1}{2}e^{-2x_2} = \frac{c}{2}e^{-5x_2} \end{aligned}$$

Damit f und f_2 Dichten sind, muß c so gewählt werden, dass

$$\int f_2(x_2)\,dx_2 = \int \int f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = 1$$

Dies ist offensichtlich bei $c = 10$ der Fall, denn dann ist f_2 die Dichte der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 5$.
Die erste Marginaldichte $f_1(x_1) = \int f(x_1, x_2)\,dx_2$ ist Null für $x_1 \leq 0$, denn für diese Werte ist der Integrand ebenfalls stets Null. Für positive x_1 ergibt sich

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_0^{x_1} f(x_1, x_2)\,dx_2 = 10e^{-2x_1} \int_0^{x_1} e^{-3x_2}\,dx_2 \\ &= 10e^{-2x_1}\frac{1}{3}(1 - e^{-3x_1}) = \frac{10}{3}(e^{-2x_1} - e^{-5x_1}) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 88 wr088

Es ist

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) + \sin(x_2)\cos(x_1)$$

und

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = 1$$

Daraus folgt, dass die Funktion f nichtnegativ ist, wenn c es ist, und dass wegen

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x_1 + x_2)dx_1 dx_2 = \ldots = 2$$

der Parameter zu $c = 1/2$ gewählt werden muss.

Lösung zu Aufgabe 89 wr089

Mit der Menge

$$\begin{aligned} M &= \{(x_1, x_2)\ ;\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_1 + x_2 \leq \pi\} \\ &= \{(x_1, x_2)\ ;\ 0 \leq x_1 \leq \pi\ ,\ 0 \leq x_2 \leq \pi - x_1\} \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned}\int f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(x_1,x_2) &= c\int 1_M(x_1,x_2)\sin(x_1+x_2)\,\mathrm{d}(x_1,x_2)\\ &= c\int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-x_1}\sin(x_1+x_2)\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

Bei festem x_1 besitzt die Funktion $x_2 \longmapsto \sin(x_1+x_2)$ die Stammfunktion $-\cos(x_1+x_2)$, so dass

$$\begin{aligned}\int f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(x_1,x-2) &= c\int_0^\pi [-\cos(x_1+x_2)]_{x_2=0}^{x_2=\pi-x_1}\,\mathrm{d}x_1\\ &= c\int_0^\pi (\cos(x_1)-\cos(\pi))\,\mathrm{d}x_1\\ &= \int_0^\pi (\cos(x_1)+1)\,\mathrm{d}x_1\\ &= c\left([\sin(x_1)]_0^\pi+\pi\right)=c\pi\end{aligned}$$

f ist also eine Dichte für $c = 1/\pi$.

2.8 Funktionen von Zufallsvariablen

Lösung zu Aufgabe 90 wr090

Mit der Menge $M = \{(x_1,x_2)\ ;\ 0\le x_1\le 1\ ,\ 0\le x_2\le 1\}$ ist die Dichte des Zufallsvektors (X_1,X_2) gleich

$$f(x_1,x_2) = 1_M(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (x_1,x_2)\in M\\ 0 & \text{für} \quad (x_1,x_2)\notin M\end{cases}$$

und mit der Menge

$$B = \{(x_1,x_2)\ ;\ x_1x_2\le \frac{1}{2}\} = \{(x_1,x_2)\ ;\ x_2\le \frac{1}{2x_1}\}$$

ist

$$\begin{aligned}P(X_1X_2\le 1/2) &= \int_B f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(x_1,x_2) = \int 1_B(x_1,x_2)1_M(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(x_1,x_2)\\ &= |B\cap M|\end{aligned}$$

Wie aus einer Skizze der Menge $B\cap M$ zu ersehen ist, ist ihre Fläche gleich

$$\begin{aligned}|B\cap M| &= \frac{1}{2}+\int_{1/2}^1\int_0^{1/2x_1} 1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}+\int_{1/2}^1\frac{1}{2x_1}\,\mathrm{d}x_1\\ &= \frac{1}{2}\left(1+[\ln(x_1)]_{1/2}^1\right) = \frac{1}{2}\left(1+\ln(2)\right)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 92 wr092

1. Die Funktion

$$G:\ \begin{aligned} y_1 &= x_2-x_1\\ y_2 &= x_1\end{aligned}$$

besitzt die Funktionaldeterminante

$$J_G(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

und die Umkehrabbildung

$$G^* : \begin{array}{rcl} x_1 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_1 + y_2 \end{array}$$

2. Sie bildet die Menge $M = \{(x_1, x_2); x_1 > 0, x_2 - x_1 > 0\}$ auf die Menge $M^* = \{(y_1, y_2); y_1 > 0, y_2 > 0\}$ ab.
3. Daraus ergibt sich für die Dichte des Zufallsvektors (Y_1, Y_2)

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(y_1 + y_2)} = \mathrm{e}^{-y_1}\,\mathrm{e}^{-y_2} & \text{falls} \quad y_1 > 0 \text{ und } y_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da diese Dichte die Form $g(y_1, y_2) = g_1(y_1)g_2(y_2)$ mit den $\mathcal{E}(1)$-Dichten g_1 und g_2 besitzt, sind Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig und exponentiell mit Parameter 1 verteilt.

Lösung zu Aufgabe 94 wr094

Es ist $Y(\omega) \leq t$ genau dann, wenn $X_1(\omega) \leq t$ und $X_2(\omega) \leq t$, woraus $(Y \leq t) = (X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)$ folgt. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_1 und X_2 erhält man daraus

$$P(Y \leq t) = P[(X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)] = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t)$$

Mit Hilfe der Verteilungsfunktionen der Verteilungen der drei Variablen formuliert lautet die Berechnungsformel für das Maximum zweier Zufallsvariabler also

$$F^Y(t) = F^{X_1}(t)F^{X_2}(t) \tag{8}$$

Für Verteilungsfunktionen von dem in Aufgabe 71 definierten Typ erhält man

$$\begin{aligned} F^Y(t) &= e^{-e^{-(t-a)}} e^{-e^{-(t-b)}} = e^{-(e^a + e^b)e^{-t}} = e^{-e^c e^{-t}} \\ &= e^{-e^{-(t-c)}} \end{aligned}$$

mit $c = \log(e^a + e^b)$, also wieder eine Verteilung vom gleichen Typ.

Lösung zu Aufgabe 95 wr095

Es ist $Y(\omega) > t$ genau dann, wenn $X_1(\omega) > t$ und $X_2(\omega) > t$, woraus $(Y > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t)$ folgt. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_1 und X_2 erhält man daraus

$$P(Y > t) = P[(X_1 > t) \cap (X_2 > t)] = P(X_1 > t)P(X_2 > t)$$

oder

$$1 - P(Y \leq t) = [1 - P(X_1 \leq t)][1 - P(X_2 \leq t)]$$

Mit Hilfe der Verteilungsfunktionen der Verteilungen der drei Variablen formuliert lautet die Berechnungsformel für das Minimum zweier Zufallsvariabler also

$$F^Y(t) = 1 - [1 - F^{X_1}(t)][1 - F^{X_2}(t)] \tag{9}$$

Für Verteilungsfunktionen von dem in Aufgabe 72 definierten Typ erhält man daraus $F^Y(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$\begin{aligned} F^Y(t) &= 1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\alpha})^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\beta})^2} = e^{-\frac{1}{2}t^2(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2})} \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\gamma})^2} \end{aligned}$$

mit $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ für $t \geq 0$, also wieder eine Verteilung vom gleichen Typ.

Lösung zu Aufgabe 97 wr097

1. Das Komplementärereignis, dass die Lebensdauer aller drei Glühbirnen höchstens 9 Zeiteinheiten beträgt, hat die Darstellung

$$\overline{A} = (X_1 \leq 9) \cap (X_2 \leq 9) \cap (X_3 \leq 9)$$

2. Da die Zufallsvariablen X_i stochastisch unabhängig sind, ist

$$P(\overline{A}) = P(X_1 \leq 9) \cdot P(X_2 \leq 9) \cdot P(X_3 \leq 9) = (F(9))^3 = \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

3. Daraus folgt

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

Lösung zu Aufgabe 98 wr098

Die Dichte der Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ ist $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$.
Mit $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x_1 > ax_2\}$ erhält man für das Ereignis $(X_1 > aX_2)$ die Darstellung

$$(X_1 > aX_2) = \{\omega \in \Omega \ ; \ X_1(\omega) > aX_2(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \ ; \ X(\omega) \in B\} = (X \in B)$$

und für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses die Berechnungsformel

$$\begin{aligned} P(X_1 > aX_2) &= P(X \in B) = P^X(B) = \int 1_B(x) f(x) dx \\ &= \int \int_{x_1 > ax_2} f_1(x_1) f_2(x_2) \, dx_1 dx_2 \\ &=: I \end{aligned}$$

In Abhängigkeit von der Reihenfolge, in der die Integrationen über die Variablen x_1 und x_2 durchgeführt werden, ergeben sich daraus die folgenden beiden Darstellungen:

(1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \left(\int_{-\infty}^{\frac{1}{a}x_1} f_2(x_2) \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) F_2(\frac{1}{a}x_1) \, dx_1 \quad (10)$$

(2)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) \left(\int_{ax_2}^{\infty} f_1(x_1) \, dx_1 \right) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)(1 - F_1(ax_2)) \, dx_2 \quad (11)$$

Lösung zu Aufgabe 99 wr099

Anwendung der Formel (11) auf $f_2(t) = F_1(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $f_2(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$, $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$ für $t > 0$ ergibt

$$I = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_2}\, dx_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \int_0^\infty (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_2}\, dx_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

denn der Integrand des letzten Integrals ist eine Dichte.

Lösung zu Aufgabe 100 wr100

Anwendung der Formel (10) auf die Dichte f_a und die Verteilungsfunktion F_b gemäß Aufgabe 71 liefert

$$I = \int_{-\infty}^\infty f_a(t) F_b(t)\, dt == \int_{-\infty}^\infty e^a e^{-t} e^{-(e^a+e^b)e^{-t}}\, dt$$

Mit c so, dass $e^c = e^a + e^b$ ergibt sich weiter

$$I = \frac{e^a}{e^c} \int_{-\infty}^\infty e^c e^{-t} e^{-e^c e^{-t}}\, dt = \frac{e^a}{e^c} \int f_c(t)\, dt = \frac{e^a}{e^a+e^b}$$

Lösung zu Aufgabe 104 wr106

Es gibt im wesentlichen zwei Lösungsmöglichkeiten:
1. über die Verteilungsfunktion: Da

$$Y = \frac{X_1}{X_1+X_2}$$

auf dem Bereich, auf dem die Dichten der Verteilungen von X_1 und X_2 positiv sind, nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt, ist $F^Y(t) = P(Y \leq t)$ gleich 0, wenn $t \leq 0$ und gleich 1, wenn $t \geq 1$. Für $0 < t < 1$ ist

$$\begin{aligned} F^Y(t) &= P(X_1 \leq t(X_1+X_2)) \\ &= P(X_1 \leq \frac{t}{1-t} X_2) \\ &= P(X_2 \geq \frac{1-t}{t} X_1) \end{aligned}$$

Sinngemäße Anwendung von Aufgabe 98 liefert

$$\begin{aligned} F^Y(t) &= \int f_1(x) \left(1 - F_2(\frac{1-t}{t} x)\right) dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda \frac{1-t}{t} x} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda(1+\frac{1-t}{t})x} dx \\ &= t \int_0^\infty \frac{\lambda}{t} e^{-\frac{\lambda}{t} x} dx \\ &= t \end{aligned}$$

also die Verteilungsfunktion der $\mathcal{U}(0,1)$-Verteilung.
2. Mit dem Transformationssatz für Dichten: Auf der Menge

$$M = \{(x_1, x_2)\ ;\ x_1 > 0 \text{ und } x_2 > 0\}$$

ist $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}$ und durch

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

wird die Menge M auf

$$M^* = \{(y_1, y_2)\ ;\ 0 < y_1 < 1 \text{ und } y_2 > 0\}$$

abgebildet mit der Funktionaldeterminante

$$J_G(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{x_2}{(x_1+x_2)^2} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{x_2}{(x_1 + x_2)^2}$$

und der Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1 y_2}{1 - y_1} \\ x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $(y_1, y_2) \in M^*$ die zweidimensionale Dichte

$$g(y_1, y_2) = \lambda^2 e^{-\frac{\lambda}{1-y_1} y_2} \frac{y_2}{(1 - y_1)^2}$$

Die erste Marginaldichte $g_1(y_1)$ ist 0 für $y_1 \notin (0, 1)$ und gleich

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \frac{\lambda}{1 - y_1} \int_0^\infty y_2 \frac{\lambda}{1 - y_1} e^{-\frac{\lambda}{1-y_1} y_2} dy_2 \\ &= \frac{\lambda}{1 - y_1} m_1(\mathcal{E}(\frac{\lambda}{1 - y_1})) \\ &= 1 \end{aligned}$$

da der Mittelwert der $\mathcal{E}(\frac{\lambda}{1-y_1})$-Verteilung gerade der Kehrwert des Parameters ist. Die Dichte g_1 ist also die der $\mathcal{U}(0, 1)$-Verteilung.

Lösung zu Aufgabe 112 wr114

Die Dichte des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ ist $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ mit $f_1(x_1) = \varphi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2}$ und $f_2(x_2) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x_2} 1_{(0,\infty)}(x_2)$.

Zur Anwendung des Transformationssatzes wird die Funktion $y_1 = G_1(x_1, x_2) = \sqrt{2} x_1 / \sqrt{x_2}$ durch $y_2 = G_2(x_1, x_2) = x_2$ ergänzt, wobei die Abbildung $G = (G_1, G_2)$ auf der Menge

$$M = \{(x_1, x_2)\ ;\ f(x_1, x_2) > 0\} = \{(x_1, x_2)\ ;\ x_2 > 0\}$$

betrachtet wird.

Die Funktionaldeterminante

$$J_G(x) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{x_2}} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{x_2}}$$

ist positiv auf M und G besitzt die Umkehrabbildung G^* mit

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \sqrt{y_2} \\ x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

auf dem Bildbreich $M^* = \{(y_1, y_2)\ ;\ y_2 > 0\}$.
Einsetzen von $G^*(y)$ in f und J_G ergibt für $(y_1, y_2) \in M^*$ als Dichte der Verteilung von G die Funktion

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{y_2} e^{-\frac{1}{2} y_2 (1 + \frac{1}{2} y_1^2)}$$

Zur Berechnung der ersten Marginaldichte

$$g_1(y_1) = \int g(y_1, y_2)\, dy_2$$

setzen wir $a = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} y_1^2)$. Mit der Substitution $t = a y_2$ erhält man

$$g_1(y_1) = \int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{y_2} e^{-a y_2}\, dy_2 = \frac{1}{4a\sqrt{\pi a}} = \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{8}(1 + \frac{1}{2} y_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Lösung zu Aufgabe 113 wr115

Die Verteilung P^X des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ besitzt die Dichte $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$, wobei $f_i(x_i)$ jeweils die Dichte der $\mathcal{U}(0,1)$-Verteilung ist. Es ist daher $f(x_1, x_2) = 1$ auf der Menge

$$M = \{(x_1, x_2)\ ;\ 0 < x_i < 1\}$$

und $f(x_1, x_2) = 0$ außerhalb dieser Menge.
Die Abbildung G mit

$$\begin{aligned} y_1 &= G_1(x_1, x_2) = \sqrt{-2 \log x_1} \cos(2\pi x_2) \\ y_2 &= G_1(x_1, x_2) = \sqrt{-2 \log x_1} \sin(2\pi x_2) \end{aligned}$$

ist auf M wohldefiniert und die Bildmenge M^* besteht aus allen Punkten des $\mathbf{R}^2$, die in Polarkoordinaten durch die Radien $r = \sqrt{-2 \log x_1}$ mit $0 < x_1 < 1$ bzw. $0 < r < \infty$ und Winkel der Form $\varphi = 2\pi x_2$ mit $0 < x_2 < 1$ bzw. $0 < \varphi < 2\pi$ dargestellt werden können. M^* besteht also aus allen Punkten (y_1, y_2) des $\mathbf{R}^2$ mit Ausnahme der auf der Halbgeraden $L_+ = \{(y_1, 0)\ ;\ y_1 \geq 0\}$.
Die Abbildung G stellt offensichtlich eine eineindeutige Abbildung von M auf M^* dar und besitzt die Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned} J_G(x) &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 \sqrt{-2 \log x_1}} \cos(2\pi x_2) & \sqrt{-2 \log x_1}(-2\pi) \sin(2\pi x_2) \\ \frac{1}{x_1 \sqrt{-2 \log x_1}} \sin(2\pi x_2) & \sqrt{-2 \log x_1}(2\pi) \cos(2\pi x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\pi}{x_1} \left(\cos^2(2\pi x_2) + \sin^2(2\pi x_2) \right) \\ &= \frac{2\pi}{x_1} \end{aligned}$$

Für $y \in M^*$ ist $G^*(y) \in M$ und somit $f(G^*(y)) = 1$. Wegen $y_1^2 + y_2^2 = r^2 = -2\log x_1$ ist

$$x_1 = e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)}$$

und man erhält als Dichte der Verteilung P^G auf M^* die Funktion

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)} = \varphi(y_1)\varphi(y_2) \tag{12}$$

Da L_+ eine Nullmenge ist, auf der man eine Dichte beliebig abändern darf, definieren wir g auf L_+ ebenfalls durch (12) und erhalten so das Resultat, dass Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängige und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable sind.

Lösung zu Aufgabe 114 wr116

Die Menge M besitzt als Viertel der Einheitskreisscheibe die Fläche $\lambda(M) = \pi/4$, woraus sich für die Dichte der Verteilung des Zufallsvektors X

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & \text{falls } (x_1, x_2) \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt. Die Abbildung G mit

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 + x_2^2 \\ y_2 &= x_1/x_2 \end{aligned}$$

ist auf M wohldefiniert und besitzt dort die Funktionaldeterminante

$$J_G(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{pmatrix} = -2\left(\frac{x_1^2}{x_2^2} + 1\right)$$

woraus man gleich

$$J_G(G^*(y)) = -2(y_2^2 + 1)$$

erhält.

Die Bildmenge $M^* = G(M)$ ist offensichtlich die Menge der Vektoren (y_1, y_2) mit $0 < y_1 < 1$ und $y_2 > 0$.

Als Formel für die Dichte g des Zufallsvektors $Y = (Y_1, Y_2)$ erhält man nach dem Transformationssatz die Funktion

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y_2^2} & \text{falls } 0 < y_1 < 1 \text{ und } y_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die sich in der Form $g(y_1, y_2) = g_1(y_1)g_2(y_2)$ mit der Dichte

$$g_1(y_1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < y_1 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der $\mathcal{U}(0,1)$-Verteilung und der Dichte

$$g_2(y_2) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y_2^2} & \text{falls } y_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einer Art Cauchy-Verteilung darstellen läßt. Die Variablen Y_1 und Y_2 sind also stochastisch unabhängig.

Lösung zu Aufgabe 115 wr117

1. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 werden als Komponenten eines zweidimensionalen Zufallsvektors X aufgefaßt, dessen Verteilung wegen der stochastischen Unabhängigkeit die Dichte $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ besitzt, wobei die Marginaldichten die der Exponentialverteilung mit Parameter λ sind. Das ergibt

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} & \text{falls } x_1 > 0 \\ & \text{und } x_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Die Menge

$$\begin{aligned} M &= \{(x_1, x_2)\ ;\ f(x_1, x_2) > 0\} \\ &= \{(x_1, x_2)\ ;\ x_1 > 0, x_2 > 0\} \end{aligned}$$

ist offen und zusammenhängend und erfüllt automatisch die Voraussetzung 1 des Transformationssatzes.

3. Dem Zufallsvektor Y entspricht die Abbildung G mit

$$\begin{aligned} y_1 &= G_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ y_2 &= G_2(x_1, x_2) = \tfrac{x_1}{x_2} \end{aligned} \tag{13}$$

Diese ist auf der Menge M wohldefiniert und differenzierbar. (Was außerhalb von M passiert, ist für den Transformationssatz irrelevant).

4. Die Funktionaldeterminante ist

$$J_G(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{vmatrix} = -\frac{x_1 + x_2}{x_2^2} \neq 0$$

auf M.

5. Die Umkehrabbildung G^* erhält man durch Auflösen des Gleichungssystems (13) nach den Variablen x_1 und x_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1 y_2}{1 + y_2} \\ x_2 &= \frac{y_1}{1 + y_2} \end{aligned} \tag{14}$$

Aus (14) und (13) ist offensichtlich, dass die Menge M auf die Menge

$$M^* = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2\ ;\ y_1 > 0, y_2 > 0\} = M$$

abgebildet wird.

6. $f(G^*(y))$ und $J_G(G^*(y))$ erhält man dadurch, dass in den Formeln für die Funktionen $f(x_1, x_2)$ und $J_G(x_1, x_2)$ die Variablen x_1 und x_2 durch die Variablen y_1 und y_2 gemäß (14) oder (13) ersetzt werden. Damit erhält man hier für $y = (y_1, y_2) \in M^*$

$$\begin{aligned} f(G^*(y)) &= \lambda^2 e^{-\lambda y_1} \\ J_G(G^*(y)) &= -\frac{(1 + y_2)^2}{y_1} \end{aligned}$$

7. Die Dichte des Zufallsvektors G bzw. Y ist daher durch

$$g(y_1,y_2) = \begin{cases} y_1\lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{1}{(1+y_2)^2} & \text{falls } y_1>0 \\ & \text{und } y_2>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Aus der letzten Formel ersieht man zusätzlich noch, dass $g(y_1,y_2) = g_1(y_1)g_2(y_2)$ mit den Dichten

$$g_1(y_1) = \begin{cases} y_1\lambda^2 e^{-\lambda y_1} & \text{falls } y_1>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g_2(y_2) = \begin{cases} \frac{1}{(1+y_2)^2} & \text{falls } y_2>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. dass die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 117 wr119

Da die Abbildung G von der Form

$$G(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ist, erhält man für die Dichte des Zufallsvektors $Y=(Y_1,Y_2)$ die Funktion

$$g(y_1,y_2) = \frac{1}{|\text{det}A|}f(A^{-1}(y)) = \frac{1}{|\text{det}A|}\frac{1}{6\pi}e^{-\frac{1}{18}h(y_1,y_2)}$$

wobei die Funktion $h(y_1,y_2)$ offensichtlich von der Form

$$h(y_1,y_2) = \alpha y_1^2 + \beta y_1y_2 + \gamma y_2^2$$

ist. Die Funktion g läßt sich genau dann als Produkt der Marginaldichten darstellen, wenn $h(y_1,y_2) = h_1(y_1)+h_2(y_2)$ bzw. $\beta=0$ ist.
Wegen

$$x_1 = \frac{y_1+ay_2}{1+2a} \text{ und } x_2 = \frac{y_2-2y_1}{1+2a}$$

ist

$$h(y_1,y_2) = \frac{1}{1+2a}[\ldots+(2a-2)y_1y_2+\ldots]$$

so dass man stochastische Unabhängigkeit für $a=1$ erhält.

Lösung zu Aufgabe 119 wr122

Aufgabenteil a) Die Aufgabenstellung unterscheidet sich nur geringfügig vom Beispiel 2 aus dem Abschnitt 13.6.2 des Vorlesungsskripts. Statt mit $Y=X_1X_2$ hat man es hier mit $Y=X_1^2X_2$ zu tun.

Da die Zufallsvariablen X_1 und X_2 im Intervall $[0,1]$ uniform verteilt und stochastisch unabhängig sein sollen, besitzt der Zufallsvektor (X_1,X_2) die Dichte

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (x_1,x_2)\in M \\ 0 & \text{für} \quad (x_1,x_2)\notin M \end{cases}$$

mit der Menge

$$M = \{(x_1, x_2)\ ;\ 0 < x_1 < 1\ ,\ 0 < x_2 < 1\}$$

Die Ränder $x_1 = 0, 1$ und/oder $x_2 = 0, 1$ kann man weglassen, da sie Wahrscheinlichkeit Null besitzen.

Lösungsvariante 1: Ergänzung durch $y_2 = x_2$.
Die Abbildung

$$G : \begin{array}{ccc} y_1 & = & x_1^2 x_2 \\ y_2 & = & x_2 \end{array} \tag{15}$$

besitzt die Funktionaldeterminante

$$J_G(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x_1x_2$$

die auf M positiv ist.
Auflösen der Gleichungen (15) nach den x_i ergibt

$$G^* : \begin{array}{ccc} x_1 & = & \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \\ x_2 & = & y_2 \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass $0 < x_1 < 1$ und $0 < x_2 < 1$ nur dann erfüllt ist, wenn $0 < y_1 < 1$, $0 < y_2 < 1$ **und** $y_1/y_2 < 1$ bzw. $y_1 < y_2$ gilt. Also

$$M^* = \{(y_1, y_2)\ ;\ 0 < y_1 < y_2 < 1\}$$

Für $(y_1, y_2) \in M^*$ ist $f(G^*(y_1, y_2)) = 1$ und

$$J_G(G^*(y_1, y_2)) = 2\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}y_2 = 2\sqrt{y_1y_2}$$

so dass die transformierte Dichte gleich

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y_1y_2}} & \text{für} \quad 0 < y_1 < y_2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist.
Die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen Y ist die erste Marginaldichte

$$g_1(y_1) = \int g(y_1, y_2)dy_2$$

von g. Liegt y_1 ausserhalb des Intervalls $(0, 1)$, so ist der Integrand identisch Null und daher $g_1(y_1) = 0$. Ist $0 < y_1 < 1$, so ist der Integrand nur für die Werte y_2 mit $y_1 < y_2 < 1$ von Null verschieden, so dass

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \int_{y_1}^{1} \frac{1}{2\sqrt{y_1y_2}}dy_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_1}} \int_{y_1}^{1} \frac{1}{2\sqrt{y_2}}dy_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_1}}(1 - \sqrt{y_1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_1}} - 1 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Ergänzung durch $y_2 = x_1$.
Die Abbildung

$$G: \begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1^2 x_2 \\ y_2 & = & x_1 \end{array} \tag{16}$$

besitzt die Funktionaldeterminante

$$J_G(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x_1^2$$

die auf M negativ ist.
Auflösen der Gleichungen (16) nach den x_i ergibt

$$G^*: \begin{array}{rcl} x_1 & = & y_2 \\ x_2 & = & \frac{y_1}{y_2^2} \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass $0 < x_1 < 1$ und $0 < x_2 < 1$ nur dann erfüllt ist, wenn $0 < y_1 < 1$, $0 < y_2 < 1$ **und** $y_1/y_2^2 < 1$ bzw. $y_1 < y_2^2$ oder $\sqrt{y_1} < y_2$ gilt. Also

$$M^* = \{(y_1, y_2)\ ;\ 0 < y_1 < 1, \sqrt{y_1} < y_2 < 1\}$$

Für $(y_1, y_2) \in M^*$ ist $f(G^*(y_1, y_2)) = 1$ und

$$|J_G(G^*(y_1, y_2))| = y_2^2$$

so dass die transformierte Dichte gleich

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{y_2^2} & \text{für} \quad 0 < y_1 < 1, \sqrt{y_1} < y_2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist.
Die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen Y ist die erste Marginaldichte

$$g_1(y_1) = \int g(y_1, y_2) dy_2$$

von g. Liegt y_1 ausserhalb des Intervalls $(0, 1)$, so ist der Integrand identisch Null und daher $g_1(y_1) = 0$. Ist $0 < y_1 < 1$, so ist der Integrand nur für die Werte y_2 mit $\sqrt{y_1} < y_2 < 1$ von Null verschieden, so dass

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \int_{\sqrt{y_1}}^1 \frac{1}{y_2^2} dy_2 \\ &= \left[-\frac{1}{y_2} \right]_{\sqrt{y_1}}^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_1}} - 1 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 3: Berechnung der Verteilungsfunktion von Y.
Die Werte von X_1 und X_2 und damit die von $Y = X_1^2 X_2$ liegen mit Wahrscheinlichkeit 1 im Intervall $(0, 1)$. Für die Verteilungsfunktion

$$F(t) = P(Y \leq t)$$

der Verteilung der Zufallsvariablen Y gilt daher $F(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $F(t) = 1$ für $t \geq 1$.
Ist $0 < t < 1$, so formt man etwas um:

$$F(t) = P(Y \leq t) = P(X_1^2 X_2 \leq t) = P(X_2 \leq \frac{t}{X_1^2})$$

Nach der Regel

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

für Zufallsvektoren ist dann

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{t}{x_1^2}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

Wie man sich anhand einer Skizze klarmacht, ist das gleich

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{\sqrt{t}} 1 dx_1 + \int_{\sqrt{t}}^1 \int_0^{\frac{t}{x_1^2}} 1 dx_2 dx_1 \\ &= \sqrt{t} + \int_{\sqrt{t}}^1 \frac{t}{x_1^2} dx_1 \\ &= \sqrt{t} + t(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1) \\ &= 2\sqrt{t} - t \end{aligned}$$

Die Dichte der Verteilung erhält man durch Differenzieren der Verteilungsfunktion zu

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 & \text{für} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{für} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Aufgabenteil b) Hier gibt es ebenfalls zwei Möglichkeiten zur Berechnung, wobei eine unabhängig von der Bearbeitung des Aufgabenteils a) ist.

Lösungsvariante 1:

$$\mathcal{E}(Y) = m_1(P^Y) = \int t g_1(t) dt = \int_0^1 t(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1) dt = \frac{1}{6}$$

Lösungsvariante 2: Da die Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind, ist

$$\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X_1^2 X_2) = \mathcal{E}(X_1^2)\mathcal{E}(X_2) = m_2(P^{X_1}) m_1(P^{X_2}) = m_2(\mathcal{U}[0,1]) m_1(\mathcal{U}[0,1])$$

mit

$$m_1(\mathcal{U}[0,1]) = \int_0^1 t \cdot 1 dt = \frac{1}{2}$$

und

$$m_2(\mathcal{U}[0,1]) = \int_0^1 t^2 \cdot 1 dt = \frac{1}{3}$$

2.9 Erwartungswert und Varianz

Lösung zu Aufgabe 128 wr132

Es ist $Y(\omega) = G(X(\omega))$ mit der Funktion $G(x) = \max(x^2, 2)$ und daher

$$\mathcal{E}Y = \int G(x)f(x)dx$$

wobei $f(x)$ die Dichte der Verteilung von X, d.h. der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1/2$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}Y &= \int_0^\infty \max(x^2, 2)\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} 2\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx + \int_{\sqrt{2}}^\infty x^2\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx \\
&= 2(1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}) + (10 + 4\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 129 wr133

1. Es ist

$$\int f(t)\,dt = \int_0^2 c\int_0^2 (2t - t^2)\,dt = \ldots = c\frac{4}{3} = 1$$

wenn man $c = \frac{3}{4}$ wählt.

Für die Aufgabenteile b) bzw. c) benutzt man die Formel $\mathcal{E}Y = \int G(t)\,f(t)\,dt$:

2.

$$\mathcal{E}Y = \int_0^2 \max(t, 1)\,f(t)\,dt = \int_0^1 1\cdot f(t)\,dt + \int_1^2 t\cdot f(t)\,dt = \ldots = \frac{19}{16}$$

3.

$$\mathcal{E}Y = \int_0^2 \min(t, 1)\,f(t)\,dt = \int_0^1 t\cdot f(t)\,dt + \int_1^2 1\cdot f(t)\,dt = \ldots = \frac{13}{16}$$

Lösung zu Aufgabe 134 wr138

Wie aus Abbildung 3 zu ersehen, ist die Menge M ein Quadrat mit der Kantenlänge $\sqrt{2}$ und der Fläche $\lambda(M) = 2$.

Die Dichte der Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ ist daher

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } (x_1, x_2) \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und wegen $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ sind die beiden Marginaldichten identisch:

$$f_1(x_1) = \int f(x_1, x_2)\,dx_2 = \int f(x_2, x_1)\,dx_2 = f_2(x_1)$$

Daraus folgt weiter, dass die Erwartungswerte und Kovarianzen der beiden Zufallsvariablen gleich sind:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}X_1 &= m_1(P^{X_1}) = m_1(P^{X_2}) = \mathcal{E}X_2 \\
\mathrm{var}X_1 &= \hat{m}_2(P^{X_1}) = \hat{m}_2(P^{X_2}) = \mathrm{var}X_2
\end{aligned}$$

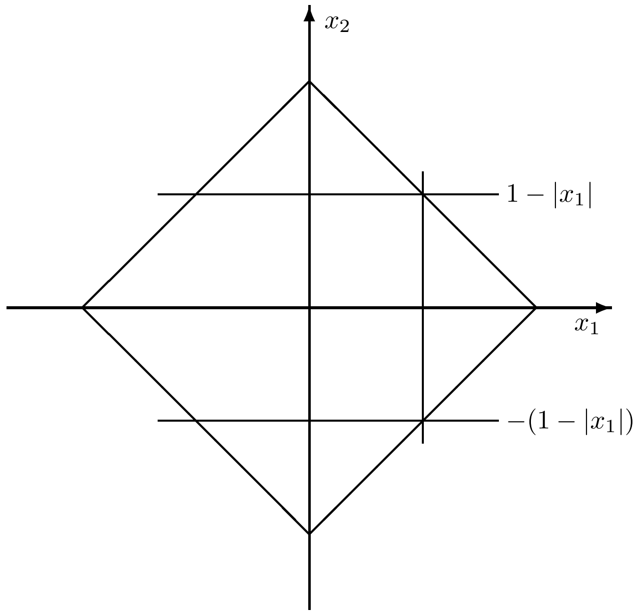


Abbildung 3: Zu Aufgabe 134

Bei $|x_1| > 1$ ist $f(x_1, x_2) = 0$ und deshalb auch $f_1(x_1) = 0$. Für $|x_1| \leq 1$ ersieht man aus der Skizze, dass

$$f_1(x_1) = \int_{-(1-|x_1|)}^{1-|x_1} \frac{1}{2}\, dx_2 = 1 - |x_1|$$

woraus man den Mittelwert

$$\mathcal{E}X_1 = m_1(P^{X_1}) = \int_{-1}^{1} x_1(1-|x_1|)\, dx_1 = 0$$

erhält, denn der Integrand ist eine ungerade Funktion. Die Varianz ist deshalb gleich dem zweiten Moment und hat den Wert

$$\hat{m}_2(P^{X_1}) = m_2(P^{X_1}) = \int_{-1}^{1} x_1^2(1-|x_1|)\, dx_1 = 2\int_0^1 x_1^2(1-x_1)\, dx_1 = \frac{1}{6}$$

Da die Erwartungswerte verschwinden, ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_1, X_2) &= \mathcal{E}(X_1X_2) - \mathcal{E}X_1\mathcal{E}X_2 = \mathcal{E}(X_1X_2) \\
&= \int x_1x_2 f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int_M \frac{1}{2} x_1x_2\, d(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x_1 \int_{-(1-|x_1|)}^{1-|x_1|} x_2\, dx_2\; dx_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x_1\, 0\, dx_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Kovarianz ist also gleich Null, obwohl die beiden Zufallsvariablen wegen $f(x_1, x_2) \neq f_1(x_1)f_2(x_2)$ stochastisch abhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 136 wr140

Ausgangspunkt ist der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}_2, P)$ mit den Trefferkoordinaten $x = (x_1, x_2)$ als Ergebnissen, wobei P die obige Dichte besitzt.
Sind $B_1,\ B_2,\ \dots B_{10}$ die konzentrischen Ringe und B_0 der Bereich außerhalb der Zielscheibe, so wird die Anzahl der erzielten Wertungspunkte durch die Zufallsvariable

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{10} k \cdot 1_{B_k}(x)$$

mit dem Erwartungswert

$$\mathcal{E}Y = \sum_{k=0}^{10} k \cdot P(B_k) = \sum_{k=1}^{10} k \cdot P(B_k)$$

beschrieben.
Die Ringe B_k kann man mit der in der Vorlesung betrachteten Zufallsvariablen $X(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ beschreiben. Es ist

$$B_k = (a_k \leq X \leq a_{k-1})$$

für $k = 1, 2, \dots 10$ mit $a_0 = 122/2 = 61$, $a_1 = 0.9{\cdot}61$, $a_2 = 0.8{\cdot}61, \dots a_9 = 0.1{\cdot}61$, $a_{10} = 0$.
Ist $F(t)$ die Verteilungsfunktion der Verteilung von X, so gilt daher $P(B_k) = F(a_{k-1}) - F(a_k)$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{E}Y &= \sum_{k=1}^{10} k(F(a_{k-1}) - F(a_k)) \\ &= F(a_0) + F(a_1) + \cdots F(a_9) - 10F(a_{10}) \end{aligned}$$

Die Menge B_0 ist das Komplement der Kreisscheibe mit Radius a_0, d.h. der Menge $(X \leq a_0)$, so dass sich der Parameter σ aus der Gleichung

$$P(B_0) = 1 - F(a_0) = 0.1 \tag{17}$$

berechnen lässt.

Wie in der Vorlesung ist $F(t) = 0$ für $t \leq 0$ und für $t > 0$ erhält man für die Menge

$$A_t = (X \leq t) = \{(x_1, x_2)\ ;\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq t\}$$

durch Übergang zu Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} F(t) &= P(X \leq t) = P(A_t) \\ &= \int_{A_t} f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) \\ &= \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2} r e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} dr d\phi \\ &= \int_0^t \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} dr \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2} t^2} \end{aligned}$$

Gleichung (17) lautet dann

$$e^{-\frac{a_0^2}{2\sigma^2}} = 0.1$$

mit der Lösung

$$\sigma^2 = -\frac{61^2}{2\log(0.1)} \approx 808.0049$$

Wegen $F(a_{10}) = F(0) = 0$ ist

$$\mathcal{E}Y = F(a_0) + F(a_1) + \cdots F(a_9) \approx 4.7997$$

Lösung zu Aufgabe 141 wr145

Die Zufallsvariablen X_i sind alle $\mathcal{U}(-1,1)$-verteilt und besitzen daher die Verteilungsfunktionen

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad t \leq -1 \\ \frac{t+1}{2} & \text{falls} \quad -1 < t < 1 \\ 1 & \text{falls} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Nach der in Aufgabe 94 hergeleiteten Formel besitzt die Verteilung von Y dann die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F(t) &= F_1(t)F_2(t)\ldots F_n(t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad t \leq -1 \\ \left(\frac{t+1}{2}\right)^n & \text{falls} \quad -1 < t < 1 \\ 1 & \text{falls} \quad t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion F ist stückweise stetig differenzierbar. Die Dichte der Verteilung P^Y erhält man durch Ableiten von F zu

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad t \leq -1 \\ \frac{n}{2^n}(t+1)^{n-1} & \text{falls} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{falls} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Der Erwartungswert $\mathcal{E}Y$ von Y ist gleich dem Mittelwert der Verteilung von Y, also gleich

$$\begin{aligned} m_1(P^Y) &= \int t f_n(t)\,dt = \int (t+1) f_n(t)\,dt - \int f_n(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{n}{2^n}(t+1)^n\,dt - 1 \\ &= \frac{2n}{n+1} \int_{-1}^{1} \frac{n+1}{2^{n+1}}(t+1)^n\,dt - 1 \\ &= \frac{2n}{n+1} \int f_{n+1}(t)\,dt - 1 \\ &= \frac{2n}{n+1} - 1 = \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 142 wr146

Es ist $Y(\omega) = G(X(\omega)) = \max(X(\omega), \frac{1}{\lambda})$, so dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_P Y &= \mathcal{E}_{P^X} = \int G(t) f^X(t) dt \\
&= \int_0^\infty \max(t, \frac{1}{\lambda}) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_{\frac{1}{\lambda}} t \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{1}{\lambda}(1 + e^{-1})
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 143 wr147

Ist x die nachgefragte und q die bestellte Menge an Eis, so wird effektiv die Menge $\min(x, q)$ verkauft. Der Gewinn bei Nachfrage x ist somit $G(x) = p_2 \min(x, q) - p_1 q$. Ist X die mit Parameter λ exponentiell verteilte Zufallsvariable, die die Nachfrage beschreibt, und $Y = G(X)$ der daraus resultierende zufällige Gewinn, so erhält man den zu erwartenden Gewinn als den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
g(q) &= \mathcal{E} Y = \int G(x)\, f(x)\, dx \\
&= p_2 \int \min(x, q)\, f(x)\, dx - p_1 q \int f(x)\, dx \\
&= p_2 \int_0^\infty \min(x, q)\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx - p_1 q \cdot 1
\end{aligned}$$

mit der Dichte $f(x)$ der $\mathcal{E}(\lambda)$-Verteilung.

Mit

$$\int_0^\infty \min(x, q)\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^q x\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx + \int_q^\infty q\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda q})$$

hat man als Erwartungswert des Gewinns

$$g(q) = \frac{p_2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda q}) - p_1 q$$

mit der Ableitung

$$g'(q) = p_2 e^{-\lambda q} - p_1$$

Für die Maximalstelle ergibt sich aus $g'(q) = 0$ die Lösung

$$q = \frac{1}{\lambda} \log(\frac{p_2}{p_1})$$

Lösung zu Aufgabe 144 wr148

Wegen der Linearität des $\mathcal{E}$-Operators gilt

$$\begin{aligned}
f(a, b) &= \mathcal{E}(Y - aX - b)^2 = \mathcal{E}\left(Y - (aX + b)\right)^2 \\
&= \mathcal{E} Y^2 - 2\mathcal{E} Y(aX + b) + \mathcal{E}(aX + b)^2
\end{aligned}$$

Mit der Regel var$X = \mathcal{E}X^2 - (\mathcal{E}X)^2$ ergibt sich weiter

$$\mathcal{E}Y^2 = \text{var}Y + (\mathcal{E}Y)^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(aX+b)^2 &= \text{var}(aX+b) + (\mathcal{E}(aX+b))^2 \\
&= a^2\text{var}(X) + (a\mathcal{E}X+b)^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

Da — wie gerade schon verwendet — $\mathcal{E}X = 0$, ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}Y(aX+b) &= a\mathcal{E}(XY) + b\mathcal{E}Y \\
&= a(\mathcal{E}(XY) - \mathcal{E}X\mathcal{E}Y) + b\mathcal{E}Y \\
&= a\,\text{cov}(X,Y) + b\,\mathcal{E}Y \\
&= \frac{1}{2}(a+b)
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das

$$f(a,b) = (a^2 - a) + (b^2 - b) + \frac{9}{4}$$

Da die Funktion $g(x) = x^2 - x$ ihre Minimalstelle bei $x = 1/2$ hat, ist $a = b = 1/2$ die Minimalstelle der Funktion f.

Lösung zu Aufgabe 145 wr149

Aufgabenteil a) Die Kovarianzmatrix ist bekanntlich die Matrix der Kovarianzen $\text{cov}(X_i, X_k)$. Aus dem Zusammenhang zwischen Varianz und Kovarianz und der Bilinearität des Kovarianzoperators erhält man

$$\begin{aligned}
\text{var}(Y) &= \text{cov}(Y,Y) \\
&= \text{cov}(X_1 - aX_2 - bX_3, X_1 - aX_2 - bX_3) \\
&= (1, -a, -b)\mathcal{C}_{\mathcal{X}} \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ -b \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
&= 1 + 3a^2 + 2b^2 - a - \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabenteil b) Die Funktion $f(a) = 3a^2 - a$ wird an der Stelle $a = 1/6$ und die Funktion $g(b) = 2b^2 - b/2$ an der Stelle $b = 1/8$ minimal. Daher hat die Varianz

$$\text{var}(Y) = 1 + f(a) + g(b)$$

bei $(1/6, 1/8)$ ihren minimalen Wert.

2.10 Normalverteilung

Lösung zu Aufgabe 147 wr151

Der Zufallsvektor X ist von der Form $X = AG + b$ und somit normalverteilt mit der Kovarianzmatrix

$$C = AA^T = \begin{pmatrix} a^2+b^2+3 & 4b-a^2 & 3a-ab-4b \\ 4b-a^2 & a^2+b^2+1 & 2ab-4 \\ 3a-ab-4b & 2ab-4 & a^2+b^2+16 \end{pmatrix}$$

Da X normalverteilt ist, sind die Komponenten X_k genau dann stochastisch unabhängig, wenn die Kovarianzmatrix eine Diagonalmatrix ist. Im obigen Fall müssen also die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4b-a^2 &= 0 \\ 3a-ab-4b &= 0 \\ 2ab-4 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein, was mit $a = 2$ und $b = 1$ der Fall ist.

Lösung zu Aufgabe 148 wr152

X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Demnach ist auch

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein $\mathcal{N}(0,1)$-verteilter Zufallsvektor.
Seine Kovarianzmatrix kann wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} C_X = C = A \cdot A^\top &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt dann, dass Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig sind, da ihre Kovarianzmatrix C_X eine Diagonalmatrix ist.

Lösung zu Aufgabe 149 wr153

1. Nach Aufgabe 148 sind $Z_1 = X_1 + X_2$ und $Z_2 = X_1 - X_2$ stochastisch unabhängig und $\mathcal{N}(0,2)$-verteilt mit den Dichten

$$f_1(t) = f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{4}t^2}$$

Für später: Die Verteilungsfunktionen nennen wir F_1 und F_2.
Die Verteilung des Zufallsvektors $Z = (Z_1, Z_2)$ besitzt daher die Dichte.

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)}$$

2. Zu bestimmen ist die Verteilung der Zufallsvariablen

$$Y = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2^2}} = \frac{Z_1}{|Z_2|}$$

Was ist, wenn $Z_2(\omega) = 0$?
Da Z_2 eine absolutstetige Verteilung und damit eine stetige Verteilungsfunktion besitzt, ist $P(Z_2 = 0) = P^{Z_2}[0,0] = F_2(0) - F_2(0-0) = 0$. Dieser Fall ist für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten daher irrelevant. Wir können dort zum Beispiel $Y(\omega) := 0$ setzen.

3. Zur Berechnung der Verteilung von Y gibt es zwei Möglichkeiten: Die Berechnung der Verteilungsfunktion oder den Transformationssatz für Dichten.
Da die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, ist vermutlich der erste Weg der günstigere.

4. Sei $t \in \mathbf{R}$ und F^Y die Verteilungsfunktion von Y:

$$F^Y(t) = P(Y \le t)$$

Es ist $Y(\omega) \le t$ genau dann, wenn entweder

$$Z_2(\omega) > 0 \text{ und } \frac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)} \le t \text{ bzw. } Z_1(\omega) \le tZ_2(\omega)$$

oder

$$Z_2(\omega) < 0 \text{ und } \frac{Z_1(\omega)}{-Z_2(\omega)} \le t \text{ bzw. } Z_1(\omega) \le -tZ_2(\omega)$$

oder

$$Z_2(\omega) = 0 \text{ und } Y(\omega) \le t$$

Die Menge $N = \{\omega\ ;\ Z_2(\omega) = 0 \text{ und } Y(\omega) \le t\}$ ist eine Teilmenge von $(Z_2 = 0)$ und hat daher die Wahrscheinlichkeit $P(N) = 0$.
Mit $Z = (Z_1, Z_2)$ gilt daher

$$F^Y(t) = P(Y \le t) = P(Z \in M_1) + P(Z \in M_2) + P(N) = P^Z(M_1) + P^Z(M_2)$$

mit

$$M_1 = \{(x_1, x_2)\ ;\ x_2 > 0\ ,\ x_1 \le tx_2\}$$

und

$$M_2 = \{(x_1, x_2)\ ;\ x_2 < 0\ ,\ x_1 \le -tx_2\}$$

P^Z besitzt die Dichte $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$, daher

$$\begin{aligned}
F^Y(t) &= \int_{M_1} f_1(x_1)f_2(x_2)\mathrm{d}(x_1,x_2) + \int_{M_2} f_1(x_1)f_2(x_2)\mathrm{d}(x_1,x_2) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{tx_2} f_1(x_1)f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 \left(\int_{-\infty}^{-tx_2} f_1(x_1)f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty f_2(x_2) \left(\int_{-\infty}^{tx_2} f_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 f_2(x_2) \left(\int_{-\infty}^{-tx_2} f_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty f_2(x_2)F_1(tx_2)\,\mathrm{d}x_2 + \int_{-\infty}^0 f_2(x_2)F_1(-tx_2)\,\mathrm{d}x_2 \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Variablensubstitution $y = -x_2$ und Symmetrie $f_2(-y) = f_2(y)$ ergibt

$$I_2 = \int_{\infty}^{0} f_2(-y)F_1(ty)(-1)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} f_2(y)F_1(ty)\,\mathrm{d}y$$

Ersetzt man in I_1 die Laufvariable x_2 durch y, so sieht man, dass $I_1 = I_2$ und damit

$$F^Y(t) = 2\int_0^{\infty} f_2(y)F_1(ty)\,\mathrm{d}y$$

Die Dichte $f^Y(t)$ als Ableitung der Verteilungsfunktion erhält man durch Differentiation nach t unter dem Integralzeichen:

$$\begin{aligned}
f^Y(t) &= \frac{d}{dt}F^Y(t) = 2\int_0^{\infty} f_2(y)\frac{\partial}{\partial t}F_1(ty)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{\infty} f_2(y)f_1(ty)y\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(t^2y^2+y^2)}y\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} 2ye^{-\frac{1}{4}(1+t^2)y^2}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $\beta = \frac{1}{4}(1+t^2)$ ist

$$\begin{aligned}
f^Y(t) &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\beta}\int_0^{\infty} 2\beta ye^{-\beta y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\beta}\left[-e^{-\beta y^2}\right]_{y=0}^{y=\infty} \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\beta} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Y ist also Cauchy-verteilt.