Weiterhin definieren wir eine Funktion $b : V \to \mathbb{R}$ mit $b(1) = 20$, $b(6) = -20$ und $b(v) = 0$ für $v = 2, 3, 4, 5$. Dann können wir das erste Problem als Min-Cost-Flow-Problem der Form

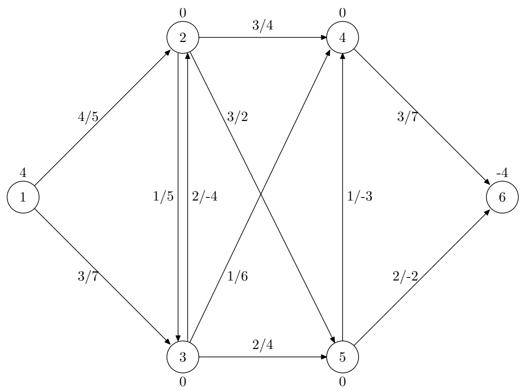
$$\min \sum_{a \in A} w_a x_a$$

$$x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = b(v) \quad \forall v \in V$$
$$0 \le x_a \le c_a \quad \forall a \in A$$

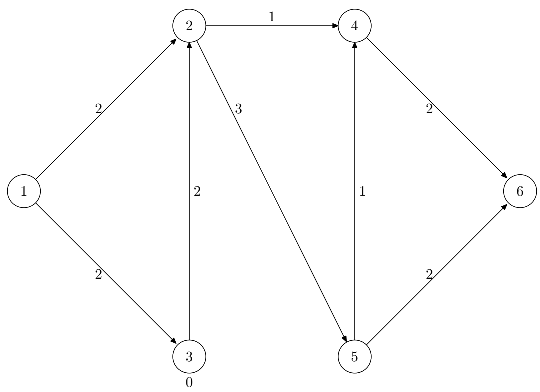
schreiben. Im zweiten Fall haben wir einen zusätzlichen Angebots- und einen zusätzlichen Bedarfsknoten. Wir haben also anstatt $b(2) = b(5) = 0$ die Zuweisungen $b(5) = 5$ und $b(2) = -5$.

Aufgabe G30 (Kreislöschungsalgorithmus)

Bestimme im folgenden Graphen mit dem Kreislöschungsalgorithmus einen kostenminimalen Fluss. Dabei stehen im Graph der erste Wert an den Bögen für die Kapazitäten des Bogens und der zweite Wert für die Transportkosten pro Einheit. Die Werte an den Knoten geben den Bedarf in diesem Knoten an.



Lösung: Sei $D = (V, A)$ der gegebene Graph. Zuerst bestimmen wir einen zulässigen Fluss x mithilfe eines Max-Flow-Algorithmus (z.B. Augmentierende Wege-Algorithmus). Ein zulässiger Fluss x ist z.B. $x_{12} = x_{24} = x_{46} = x_{13} = x_{35} = x_{56} = 2$. (Der Bedarf an den Knoten muss eingehalten werden.) Im Residualgraphen suchen wir nun nach negativen Kreisen. Wir wählen z.B. $2 \to 5 \to 4 \to 2$ als negativen Kreis und augmentieren um $\epsilon = 1$. Danach wählen wir $2 \to 5 \to 3 \to 2$ und augmentieren um $\epsilon = 2$. Es gibt keine weiteren negativen Kreise und wir sind fertig. Der Fluss hat Gesamtkosten 33 und ist in folgender Abbbildung dargestellt.



Aufgabe G31 (Reduzierung von Angebot und Bedarf)

Gegeben sei ein Min-Cost-Flow Problem mit **positiven** Kantenkosten. Beweise oder widerlege folgende Eigenschaft: