Aufgabe 2

(a)

$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ist monoton und unbeschränkt} \tag{1}$$

$$\wedge$$

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n) \tag{2}$$

$$\longrightarrow$$

$$f(h(k)) \in \mathcal{O}(g(h(k))) \Leftrightarrow \exists c > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : f(h(k)) \leq cg(h(k)) \tag{3}$$

Beweis. Wir nehmen an, (1) $\wedge$ (2) sei gültig.
h ist unbeschränkt $\Rightarrow \exists k_0 : h(k_0) > n_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \exists c > 0 : f(h(k_0)) \leq cg(h(k_0))$
h ist monoton $\Rightarrow \forall k \geq k_0 : h(k) \geq h(k_0) \geq n_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \exists c > 0 : f(h(k)) \leq cg(h(k))$
$\Rightarrow \exists c > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : f(h(k)) \leq cg(h(k)) \Leftrightarrow f(h(k)) \in \mathcal{O}(g(h(k)))$ (3)
$\Rightarrow$ (1) $\wedge$ (2) $\to$ (3) □

Für Ω lässt sich trivial ein analoger Beweis konstruieren. Die Beweisführung ist unabhängig davon, ob wir bezüglich einer oberen oder unteren Schranke argumentieren.