

Mathematik fuer Ingenieure 2

Wintersemester 2011/12, Dauer 90 Minuten, 25 Punkte

05.04.2012

Aufgabe 1. (5 Punkte) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{2a_n} \right), \quad n \geq 1.$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung der Mittelwerte $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \ln(x+2).$$

Zeigen sie, dass f auf dem Intervall $[1,2]$ genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3. (3+2 Punkte)

- **a)** Berechnen Sie das **Taylorpolynom** $T_2(x)$ der Ordnung zwei der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{16},$$

zum Entwicklungspunkt $x_* = -1$

- **b)** Bestimmen Sie den **Konvergenzradius** der Taylorreihe der Funktion f aus **a)** Entwicklungspunkt $x_* = -1$

Aufgabe 4. (5 Punkte) Bestimmen Sie, ob das **uneigentliche Integral** existiert und im Falle seiner Existenz, berechnen Sie seinen Wert:

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{9x^2 (\arctan(x^3))^2}{1+x^6} dx$$

Aufgabe 5. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y, z) = x \sin(y) - x z e^x$$

in jedem $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ folgende Gleichung erfüllt:

$$x f_x(x, y, z) - f_{xx}(x, y, z) + f_{yy}(x, y, z) - f_z(x, y, z) = (-x^2 z + 2z + x) e^x.$$

(Hier wurde mit $f_x(x, y, z)$ die partielle Ableitung von f bezüglich x in (x, y, z) bezeichnet u.s.w)