

Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2-4 den kompletten Lösungsweg in nachvollziehbarer Weise an. Schreiben Sie auch Nebenrechnungen mit auf. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.

**Aufgabe 2**

(9 Punkte)

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$ . Von der gemeinsamen Dichte  $f^{X_1, X_2}$  sind die bekannten Information in der Tabelle zusammengefasst.

		$X_2$	
		3	4
$X_1$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
	2	$a$	$\frac{1}{5}$

- a) (3 Punkte) Wie muss  $a \in \mathbb{R}$  gewählt werden, damit die Werte in der Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsdichte ergeben?
- b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die zu  $X_1$  und  $X_2$  gehörigen Wahrscheinlichkeitsmodelle  $(\Omega_i, \mathcal{A}, P^{X_i})$  für  $i = 1, 2$ . Berechnen Sie  $\text{Var}(X_1)$ .
- c) (3 Punkte) Betrachten Sie nun  $(X_1, X_2)$  als ein gekoppeltes Modell und geben Sie die Übergangsdichten an.

**Aufgabe 3**

(9 Punkte)

Ein Automat habe die Zustände „Sonne“, „Aprilwetter“ und „Dauerregen“. Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  wechselt er aus dem Zustand „Sonne“ in den Zustand „Aprilwetter“, verbleibt sonst im Zustand „Sonne“. Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{3}{4}$  verbleibt der Automat im Zustand „Dauerregen“, sonst wechselt er in den Zustand „Aprilwetter“. Aus dem Zustand „Aprilwetter“ wechselt der Automat jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  in Zustand „Dauerregen“ oder „Sonne“.

- a) (3 Punkte) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen, der den Automaten beschreibt. Stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix auf.
- b) (1 Punkt) Warum besitzt der beschriebene Prozess eine Gleichgewichtsverteilung?
- c) (5 Punkte) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung des beschriebenen Prozesses. Begründen Sie, warum es sich bei Ihrem Ergebnis um eine Verteilung handelt.

**Aufgabe 4**

(9 Punkte)

Bei einem Spiel erscheinen als Ergebnis die Farben „rot“, „blau“ und „grün“. Von der Verteilung ist nur die nebenstehende Tabelle mit den Parametern  $p, q \in \mathbb{R}^+$  bekannt. Die Parameter  $p$  und  $q$  sollen mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer ermittelt werden. Als Stichprobe  $x$  dienen die Ergebnisse  $x = (,rot“, ,blau“, ,rot“)$ .

rot	blau	grün
$p$	$q$	$1 - p - q$

- a) (1 Punkt) Welche empirische Verteilung ergibt sich aus der Stichprobe?
- b) (2 Punkte) Stellen Sie die Likelihoodfunktionen  $L$  und  $\ln(L)$  für die gegebene Stichprobe auf.
- c) (6 Punkte) Berechnen Sie die Schätzwerte für  $p$  und  $q$  aus der gegebenen Stichprobe.

**Hinweis:** Die Matrix  $\begin{pmatrix} -24 & -16 \\ -16 & -32 \end{pmatrix}$  ist negativ definit.