Mathematik für Ingenieure C4

SoSe 2016
28. Juli 2016
Dr. W. Rathmann

Klausur Teil 2

Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2-4 den kompletten Lösungsweg in nachvollziehbarer Weise an. Schreiben Sie auch Nebenrechnungen mit auf. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Gegeben sei ein elektronischer Würfel mit den Ergebnissen 1,2,3,4,5,6. Es sei bekannt, dass der Würfel sich entsprechend einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ verhält, die Parameter sind jedoch unbekannt. Da geprüft werden soll, ob der Erwartungswert $\mu = 3{,}5$ beträgt, wird eine Stichprobe mit den Ergebnissen $\mathbf{x} = (1, 3, 5, 5, 6)$ gezogen.
Wie lautet Ihre Entscheidung zum Signifikanzniveau von 5%?

Hinweis: $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1$.

Einige Quantile: $t_{4;0{,}95} = 2{,}13$, $t_{4;0{,}975} = 2{,}78$, $t_{5;0{,}95} = 2{,}02$, $t_{5;0{,}975} = 2{,}57$,
$s_{0{,}95} = 1{,}65$, $s_{0{,}975} = 1{,}96$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2013 raucht ein Viertel der deutschen Bevölkerung (Personen, die älter als 15 Jahre sind). Es wird nur zwischen weiblichen Personen und männlichen Personen unterschieden. Von den weiblichen Personen rauchen 20% und von den männlichen Personen sind 30% Raucher.

a) Geben Sie die Verteilung für männliche Personen und weibliche Personen der deutschen Bevölkerung (Personen älter als 15 Jahre) an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (älter als 15 Jahre) die raucht auch männlich ist?

Hinweis: Stellen Sie zunächst eine Formel für die Wahrscheinlichkeit auf, dass eine Person raucht.

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Gegeben sei ein standardnormalverteilter Zufallsvektor $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P^{\mathbf{Z}})$. Weiter sei die Zufallsvariable $\mathbf{U}$ durch $\mathbf{U} = A_\alpha \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{b}$ mit der Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, und dem Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 28 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) (3 Punkte) Wie lautet die Dichte $f^{\mathbf{Z}}$? Geben Sie die Verteilung von $\mathbf{U}$ in Abhängigkeit von α an.

b) (2 Punkte) Begründen Sie, dass für die Wahl $\alpha = -2$, U_1 und U_2 stochastisch unabhängig sind.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(U_1 + U_2)$ für $\alpha = 1$.

d) (2 Punkte) Begründen Sie, dass im Allgemeinen eine Kovarianzmatrix K symmetrisch sein muss.