

Dr. W. Rathmann

Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Alle schriftlichen Hilfsmittel sind zugelassen.

Aufgabe 1

(10 Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markow-Kette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & a & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & b & b & \frac{1}{3} \\ 0 & ba & 2b & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Parameter a und b und zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.
- b) (1 Punkt) Ist der Graph irreduzibel?
- c) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung.

Aufgabe 2

(10 Punkte)

- a) (5 Punkte) Gegeben sei die Ordnungsstatistik einer Stichprobe

$$\mathbf{x}_{[1]} = (-3, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 3)$$

mit $\sum_{i=1}^n x_{[i]}^2 = 27$. Berechnen Sie das arithmetische Mittel \bar{x} , den Median \tilde{x} , die Quantile $u_{25\%}$ und $u_{75\%}$ sowie die empirische Varianz s_x^2 . Skizzieren Sie den zugehörigen (einfachen) Boxplot.

- b) (5 Punkte) Von einer Stichprobe y einer normalverteilten Grundgesamtheit Y sei der Umfang $n = 25$, $\bar{y} = 2$ und die Varianz $\sigma^2 = 9$ bekannt. Welche Schätzfunktion $\hat{\Theta}$ wählen Sie zum Schätzen des Erwartungswertes $E(Y)$? Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert $\hat{\Theta} = \mu$ zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.1$
 Quantile einiger Verteilungen: $z_{0,95} = 1,64$, $z_{0,975} = 1,96$, $t_{0,95;15} = 1,75$, $t_{0,975;15} = 2,13$, $t_{0,95;16} = 1,75$, $t_{0,975;16} = 2,12$.

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Von einem zweistufigen gekoppelten Modell ist bekannt, dass für die erste Stufe $X_1 \sim R_{(0,2)}$ gilt. Die gemeinsame Dichte $f^{(X_1, X_2)}$ ist gegeben durch

$$f^{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{1}{4-2x_1}, & \text{für } x_1 \in (0, 2), x_2 \in (x_1, 2), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Menge $M \in \mathbb{R}^2$ auf der $f^{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) > 0$ gilt (einschließlich deren Rand).
- b) (5 Punkte) Überprüfen Sie, ob $f^{(X_1, X_2)}$ die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt.
- c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Randdichte f^{X_1} und die Übergangsdichte f_2^1 .
- d) (1 Punkt) Interpretieren Sie die Übergangsdichte f_2^1 .

Hinweis: Falls benötigt, darf die Eigenschaft $\int_0^2 \ln\left(\frac{2}{2-x}\right) dx = 2$ verwendet werden.

Aufgabe 4

(10 Punkte)

Ein fairer Tetraeder wird einmal geworfen und danach wird ein fairer Würfel viermal nacheinander geworfen. Die Resultate seien T_N, X_1, X_2, X_3, X_4 , wobei $T_N \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $X_i \in \{1, \dots, 6\}$ gilt. Anschließend wird die Summe

$$Z = X_1 + \dots + X_{T_N}$$

gebildet.

- a) (3 Punkte) Geben Sie für den Wurf des Tetraeders ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell an.
- b) (1 Punkt) Berechnen Sie Z für die Realisierung $(t_N, x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 6, 5, 4, 6)$.
- c) (6 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen Z .