UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG, DEPARTMENT MATHEMATIK

Mathematik für Ingenieure C4, 8. April 2013, 10:15–11:45 Uhr

Dr. W. Rathmann

Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Alle schriftlichen Hilfsmittel sind zugelassen.

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

In einer Urne seien 2 schwarze Kugeln und 1 gelbe Kugel. Zwei Spieler X und Y ziehen abwechselnd eine Kugel ohne Zurücklegen, wobei Spieler X beginnt. Wer zuerst die gelbe Kugel zieht, hat gewonnen. Beim Ziehen der Kugeln sind alle Kugeln gleichberechtigt.

a) Stellen Sie das gekoppelte Modell auf und geben Sie alle Übergangsdichten an. (Graph genügt.)

b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, das Spieler Y bzw. Spieler X gewinnt?

c) Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariable

$$A = \text{„Anzahl der Ziehungen pro Spiel“}$$

an.

d) Berechnen Sie $\operatorname{Var}(A)$, $\mathrm{E}(A)$ und $\mathrm{E}(A^2)$.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Gegeben ist die Menge M als

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant |x_1|\}.$$

Skizzieren Sie die Menge M.

Auf M ist die Zufallsvariable $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ gleichverteilt. Geben Sie die gemeinsame Dichte $f^{(X_1, X_2)}$ an und bestimmen Sie die Randdichten $f^{(X_1)}$ und $f^{(X_2)}$.

Überprüfen Sie, ob X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

X ist eine Zufallsvariable über einer Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Von der Verteilung P ist nur

$$P^X(X = 1) = \theta, \text{ und } P^X(X = 2) = 2\theta$$

mit $\theta \in \mathbb{R}$ bekannt.

a) Welche Werte dürfen für θ gewählt werden, damit P^X eine Verteilung ist?

b) Berechnen Sie $E(X)$, $\operatorname{Var}(X)$ und $\mathrm{E}(2X)$ in Abhängigkeit von θ.

c) Bekannt sind die Realisierungen $1, 2, 3, 2, 1$ von X. Schätzen Sie θ mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Gegeben sind die Zufallsvariablen $X_1 \sim R[0, 1]$ und $X_2 \sim R[0, 1]$. Die Zufallsvariable Y ist gegeben als $Y := X_1 + X_2$.

a) Bestimmen und skizzieren Sie die gemeinsame Dichte $f^{(X_1, X_2)}$ von X_1 und X_2.

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Dichtefunktion f^Y und die Verteilungsfunktion F^Y von Y.