

Dr. W. Rathmann

Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Alle schriftlichen Hilfsmittel sind zugelassen.

**Aufgabe 1**

(10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e}{x^2+2xe+e^2} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

- a) Für welches  $c$  ist  $f(x)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f^X(x)$  einer Zufallsvariablen  $X$ . Geben Sie die Verteilungsfunktion  $F^X(x)$  an.
- b) Existieren die Erwartungswerte  $E(X)$  und  $E(g(X))$  für  $g(x) = (x + e)^{-1}$ ?

**Aufgabe 2**

(10 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & ? & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{6} & ? \\ ? & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- a) Vervollständigen Sie die Matrix  $P$ .
- b) Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen homogenen Markow-Kette.
- c) Überprüfen Sie, ob die Matrix  $P$  irreduzibel ist.
- d) Zeigen Sie, dass jede Starverteilung  $p^0 = (a, b, c)$  nach einem Schritt in die Gleichgewichtsverteilung  $\pi$  übergeht.

**Aufgabe 3**

(10 Punkte)

Ein Postbote ist für die Briefzustellung in zwei Gebieten  $A_1$  und  $A_2$  zuständig. Für Gebiet  $A_1$  benötigt er zwischen 2 und 4 Stunden (steig gleichverteilt), Gebiet  $A_2$  bewältigt er in 2 bis 5 Stunden (Beta $_{[2,5]}(3, 1)$ -verteilt).

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er beide Gebiete in fünf Stunden schafft (Ereignis  $E$ ), wenn die Zeiten für beide Gebiete unabhängig sind? Geben Sie eine R-Dichte in  $\mathbb{R}^2$  an, skizzieren Sie das Ereignis  $E$  und berechnen Sie die zugehörigen Randdichten.
- b) Geben Sie eine R-Dichte in  $\mathbb{R}^2$  an und skizzieren Sie das Ereignis  $E$  für den Fall, dass der Postbote, falls das Verteilen im Gebiet  $A_1$  unter 2.5 Stunden gedauert hat, eine Stunde Pause macht.

*Hinweis:* Die Beta-Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Intervall  $[a, b]$  ist definiert als

$$\text{be}_{[a,b]}(p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} (b-a)^{1-p-q} (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1}.$$

**Aufgabe 4**

(10 Punkte)

Es wird die Dauer des Einschaltvorgangs einer Maschine anhand von 36 Messungen untersucht. Dabei wurde eine mittlere Einschaltdauer  $\bar{x} = 122s$  ermittelt. Aus früheren Untersuchungen ist bekannt, dass für die Varianz  $\sigma^2 = 25s^2$  angenommen werden kann.

- a) Überprüfen Sie, ob mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% angenommen werden kann, dass der wahre Mittelwert den Einschaltvorgang kleiner als 120s ist.
- b) Wie groß muss  $\bar{x}$  sein, damit der Test nicht abgelehnt wird.
- c) Ändert sich die Entscheidung von a), falls nur die empirische Streuung  $s = 5s$  bekannt ist.