Klausur Mathematik für Ingenieure C3, Bachelor **WiSe ’15/’16**

Montag, 04.04.2016

Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen)

Finden Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + x$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

Hinweis:
Ein Vorschlag zum Lösen des Lagrange-Systems: Multiplizieren Sie eine der Gleichungen mit x und eine der Gleichungen mit y, so dass Sie anschließend per Differenzbildung den Lagrange-Parameter λ eliminieren können.

(7 Punkte)

A2) (Kurvenintegral)

Wir betrachten die Kurve Γ mit der Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\,, \quad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}\right]\,.$$

Ferner sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y) := \begin{pmatrix} (x^2+y^2)\,y \\ x^2 + 2x + y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Kurvenintegral zweiter Art

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{s}\,.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$

(5 Punkte)

A3) (Lokale Auflösungsfunktionen, lokale Umkehrfunktionen)

a) Sei

$$f(x,y) := 2\,e^{x-y} - (x^2 + y^2)\,.$$

(i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x,y)$, $\partial_2 f(x,y)$.

(ii) Es sei $x_0 := 1$, $y_0 := 1$.
Es ist offensichtlich $f(x_0, y_0) = 2 \cdot e^0 - (1+1) = 0$, d.h. der Punkt (x_0, y_0) liegt auf der Kurve, die durch die Gleichung

$$f(x,y) = 0 \qquad\qquad (*)$$

beschrieben wird.
Untersuchen Sie, ob man mit dem Satz über implizite Funktionen an der Stelle (x_0, y_0) darauf schließen kann, dass

(I.) die Gleichung (*) lokal nach y auflösbar ist, es also eine lokale Auflösungsfunktionktion $y = y(x)$ gibt;

(II.) die Gleichung (*) lokal nach x auflösbar ist, es also eine lokale Auflösungsfunktionktion $x = x(y)$ gibt.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $g(x,y) := \begin{pmatrix} e^x + e^{-y} \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$.

(i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Jg(x,y)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an jeder Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ lokal umkehrbar ist, dass es also eine Umgebung D von (x_0, y_0) gibt, so dass $g|_D : D \to g(D)$ eine Umkehrfunktion hat.

$(3 + 4 = 7$ Punkte)

A4) (Differentialgleichungen)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{t^2\, y(t)}{(\ln y(t))^2}\,, \quad y(1) = e\,.$$

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = A\,\vec{y}(t) \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(4+5=9 Punkte)

****** **** Bitte wenden **** ******

A5) (Algebra)

a) (i) Geben Sie die vom Element $[8]_{20}$ erzeugte Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ an.

(ii) Geben Sie das Inverse von $[8]_{20}$ in $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ an.

b) (i) Geben Sie die vom Element $[7]_{20}$ erzeugte Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$ an.

(ii) Geben Sie das Inverse von $[7]_{20}$ in $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$ an.

c) Hat die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}_{150}^*, \cdot)$ eine Untergruppe mit genau 25 Elementen? Warum bzw. warum nicht?

d) Ist die folgende Behauptung über $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ wahr oder falsch?
"Für alle $[a]_5, [b]_5 \in \mathbb{Z}_5$ gilt: $([a]_5 + [b]_5)^5 = [a]_5^5 + [b]_5^5$"
Beweis oder Gegenbeispiel!

(2+3+2+2=9 Punkte)

(Summe: 37 Punkte)