Department Mathematik
Dr. rer. nat. Lars Schewe
Mathias Sirvent

WIRTSCHAFTS
MATHEMATIK

Wintersemester 2013/2014
31.03.2014

Klausur
Mathematik für Ingenieure C3

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte	12	12	12	12	12	60	
erreichte Punkte							

Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes LP

$$\begin{array}{llllllll}
\min & & - & 2x_2 & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & +x_3 & & = 10 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & +x_4 & = 5 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq 0 & &
\end{array}$$

i) Betrachten Sie $\overline{x} = (0, 0, 10, 5)$. Ist dies eine zulässige Basislösung?

ii) Ist $\overline{x}$ bereits optimal? Falls nicht, geben Sie eine bessere Lösung an.

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = 2x^2y + y^2 + x^2.$$

(a)
- Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f im $\mathbb{R}^2$.
  (Hinweis: Eine der kritischen Stellen liegt bei $(0, 0)$.)
- Prüfen Sie, ob f an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt.

(b) Bestimmen Sie nun für obige Funktion f das globale Maximum und das globale Minimum unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 27.$$

Aufgabe 3

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL an und geben Sie eventuell benötigte Einschränkungen an y und t an:

$$y' = \exp(\frac{1}{5}y + \frac{t}{2}).$$

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung des folgenden DGL-Systems an:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 2x_2(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Sei $s \in \mathbb{Z}$ der größte gemeinsame Teiler von 289 und 68, also ggT$(289, 68) = s$. Des Weiteren sind Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, sodass $s = a \cdot 289 + b \cdot 68$. Berechnen Sie a, b und s.

(b) Wie viele Elemente hat ...

i. ... die Additive Gruppe $\mathbb{Z}_{54}^{+}$?

ii. ... die Multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_{54}^{*}$?

(c) Entscheiden Sie bei den folgenden Abbildungen, ob es sich um Gruppenhomomorphismen handelt. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Kern und das Bild der Abbildungen.
(*Hinweis:* Sie brauchen nicht zu zeigen, dass $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ Gruppen sind.)

i. $\varphi_1 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ x \mapsto e^{5x}$

ii. $\varphi_2 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +),\ x \mapsto x^2$

(d) Betrachten Sie die Matrizenmenge $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1 \right\}$. Ist die Menge M zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe? Falls ja, ist sie auch eine Abelsche Gruppe?

(*Hinweis:* Benutzen Sie die Determinanteneigenschaft von M)

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Menge der symmetrischen und positiv semidefiniten $n \times n$-Matrizen konvex ist.