Mathematik für Ingenieure C3, Bachelor — **Klausur**
PD Dr. S. Kräutle
Dienstag, 01.10.2013 — **Dauer: 90 min**

I.A. erfordert jede Teilaufgabe eine Rechnung oder Begründung (es sei denn, die Aufgabenstellung besagt ausdrücklich, dass die Angabe des Ergebnisses reicht).
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Extremwerte)

a) Es sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x,y) = e^x + y^2\,.$$

(i) Berechnen Sie Gradienten und Hesse-Matrix von u.

(ii) Ist u konvex? (Kurze Begründung)

(iii) Hat u eine lokale Maximalstelle? (Kurze Begründung)

(iv) Hat u eine globale Maximalstelle? (Kurze Begründung)

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x\,e^y\,.$$

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}\,.$$

<u>Hinweis</u> zum Lösen des Lagrange-Gleichungssystems:
Vorschlag: Eliminieren Sie den Term e^y, indem Sie z.B. eine der Gleichungen mit x multiplizieren und dann von einer der anderen Gleichungen abziehen.

(2+1+1+1+7=12 Punkte)

A2) (Kurvenintegral)

Es sei eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ durch die Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \sqrt{3}]$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Bogenlänge $|\Gamma|$.
<u>Hinweis:</u> Falls Sie das Integral korrekt aufgestellt haben, sollte es sich mittels Substitution $u := t^2 + 1$ oder $u := t^2$ ausrechnen lassen.

b) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Tangente, die die Kurve im Punkt $\vec{\gamma}(1)$ berührt.

(6+2=8 Punkte)

A3) (Differentialgleichungen)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{\cos t}{e^y}, \quad y(0) = 1.$$

b) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Differenzialgleichungssystem $\vec{y}\,' = A\,\vec{y}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zur Kontrolle Ihrer Zwischenergebnisse: A hat nur *ganzzahlige* Eigenwerte.

c) Eine lineare Differenzialgleichung sechster Ordnung habe das *komplexe* Fundamentalsystem

$$\{\, e^{it},\, e^{-it},\, e^{(3+2i)t},\, e^{(3-2i)t},\, e^{5t},\, e^{-5t} \,\}$$

(i = imaginäre Einheit). Geben Sie ein zugehöriges *reelles* Fundamentalsystem an. (Angabe des Ergebnisses reicht.)

(4+5+3=12 Punkte)

A4) (Algebra)

a) Geben Sie die von $[8]_{20}$ erzeugte zyklische Untergruppe von $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ an. (Angabe des Ergebnisses reicht.)

b) Hat $[8]_{20}$ ein Inverses

(i) in $(\mathbb{Z}_{20}, +)$,

(ii) in $(\mathbb{Z}_{20}, \cdot\,)$,

und, falls ja, wie lautet dieses?
(Im Falle der Existenz reicht die Angabe des Inversen; im Falle der Nichtexistenz reicht eine kurze Begründung der Nichtexistenz.)

c) Ist $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$ ein Körper? (Kurze Begründung)

d) Hat $(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30}, +)$ eine Untergruppe mit genau 200 Elementen? Warum (nicht)?

e) Wie viele Elemente hat die Gruppe $(\mathbb{Z}_{300}^*, \cdot\,)$?

(2+2+1+1+2=8 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)

Viel Erfolg!