I.A. erfordert jede Teilaufgabe eine Rechnung oder Begründung (es sei denn, die Aufgabenstellung besagt ausdrücklich, dass die Angabe des Ergebnisses reicht).
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Extremwerte)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - \frac{1}{3}\, y^3 \,.$$

(i) Berechnen Sie Gradient und Hesse-Matrix von f.

(ii) Bestimmen Sie alle lokalen Maximal- und Minimalstellen von f. (Antwortsatz!)

(iii) Ist f konvex? (Kurze Begründung)

b) Bestimmen Sie für obiges f nun das Maximum und das Minimum unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1 \,.$$

Hinweise zum Lösen des Lagrange-Gleichungssystems:
(1.) Vorschlag: Eliminieren Sie den Lagrange-Multiplikator λ, indem Sie eine der Gleichungen mit x und eine der Gleichungen mit y multiplizieren, und dann die Gleichungen voneinander abziehen.
(2.) Sie können im Verlauf der Rechnung verwenden: Für Punkte (x,y) mit $x^2+y^2=1$ ist immer $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$, somit $xy \in [-1,1]$, somit insbesondere $xy \neq 2$.

(5+8=13 Punkte)

A2) (Kurvenintegral)

Es sei eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ durch die Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \frac{1}{2}\, t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \sqrt{3}],$$

gegeben, sowie eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 + \sqrt{2|z|} \,.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral erster Art

$$\int_\Gamma f \, ds \,.$$

Hinweis: Falls Sie das Integral korrekt aufgestellt haben, sollte es sich mittels Substitutionsregel ausrechnen lassen.

(6 Punkte)

A3) (Differentialgleichungen)

a) Wir betrachten die lineare Differenzialgleichung

$$y''' + y'' + y' + y = 0\,.$$

(i) Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem.
Hinweis: Sie können verwenden, dass $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$.

(ii) Finden Sie zu obiger Differenzialgleichung eine Anfangsbedingung der Form $(y(0), y'(0), y''(0)) = (\alpha, \beta, \gamma)$, für die die Lösung $y \mapsto y(t)$ des Anfangswertproblems die Eigenschaft $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ hat.
Hinweis: Falls Sie die Lösung ohne lange Rechnung finden können, reicht hier die Angabe des Ergebnisses.

b) Wandeln Sie die Differenzialgleichung

$$y''' - 2\,y' = \sin t$$

um in ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung.

c) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Differenzialgleichungssystem $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zur Kontrolle Ihrer Zwischenergebnisse: A hat nur *einen* Eigenwert, und dieser liegt in $\mathbb{N}$.

(4+3+8=15 Punkte)

A4) (Algebra)

a) Berechnen Sie $-[9]_{11}$, $[3]_{16}^{-1}$ und $[97]_{100} \cdot [98]_{100} \cdot [99]_{100}$.

b) Existieren $[2]_{32}^{-1}$, $[3]_{32}^{-1}$? Warum (nicht)?
Hinweis: Berechnung dieser Elemente nicht zwingend erforderlich.

c) (i) Geben Sie die von $[12]_{30}$ erzeugte zyklische Untergruppe von $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ an. (Angabe des Ergebnisses reicht.)

(ii) Hat $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ eine Untergruppe mit genau 20 Elementen? Warum (nicht)?

(3+2+3=8 Punkte)

(Summe: 42 Punkte)

Viel Erfolg!