

---

*Alle Teilaufgaben erfordern entweder  
eine Rechnung oder eine kurze Begründung.*

---

**A1) (Extremwerte)**

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 + 4x.$$

- a) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von  $f$  unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Hinweis zum Lösen des Lagrange-Gleichungssystems: Eliminieren Sie den Lagrange-Multiplikator  $\lambda$ , indem Sie eine der Gleichungen mit  $x$  und eine der Gleichungen mit  $y$  multiplizieren.

- b) Beantworten Sie (mit 'ja' oder 'nein', *und mit kurzer Begründung!*):
- (i) Nimmt  $f$  auf  $D_{f,1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 100\}$  ein Minimum an?
  - (ii) Nimmt  $f$  auf  $D_{f,2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$  ein Maximum an?
- c) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $(0, 0)$  weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum annimmt.

(7+2+3=12 Punkte)

**A2) (Kurven)**

Es sei eine Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  durch die Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^2 \\ (2t+1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2],$$

gegeben.

- a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.
- b) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve im Punkt  $(\frac{3}{2}, 3\sqrt{3})$ . Geben Sie die Tangentengleichung in der Form  $y = ax + b$  an.

(5+3=8 Punkte)

### A3) (Differentialgleichungen)

- a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = e^{y+2t}, \quad y(0) = 0.$$

- b) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem für die lineare Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

- c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' + 2y = 3e^{-2t}t^2.$$

- d) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem  $\vec{y}' = A\vec{y}$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3+3+3+3=12 Punkte)

### A4) (Algebra)

- a) Berechnen Sie  $[4]_{15}^{-1}$  und  $[11]_{27}^{-1}$  und  $[15]_{17} \cdot [2]_{17}^4$ .

- b) Welche der drei Fehlerarten

( $\alpha$ ) Einzelfehler,

( $\beta$ ) Nachbarvertauschungsfehler,

( $\gamma$ ) Vertauschungsfehler

kann mit folgender Prüfgleichung sicher erkannt werden? (kurze Begründungen!)

- (i) Prüfgleichung

$$6d_1 + 5d_2 + 4d_3 + 3d_4 + 2d_5 + d_6 \equiv 0 \pmod{7},$$

für einen Datensatz  $(d_1, \dots, d_5 | d_6)$ ,

- (ii) Prüfgleichung

$$2d_1 + 4d_2 + 5d_3 + 7d_4 \equiv 0 \pmod{9},$$

für einen Datensatz  $(d_1, d_2, d_3 | d_4)$ .

(3+5=8 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)