Mathematik für Ingenieure C-III, Bachelor | **WS 10/11**
PD Dr. S. Kräutle | **Klausur**
Mittwoch, 05.10.2011 | **Dauer: 90 min**

Alle Teilaufgaben erfordern entweder eine Rechnung oder eine kurze Begründung.

A1) (Extremwerte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 + 4x.$$

a) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Hinweis zum Lösen des Lagrange-Gleichungssystems: Eliminieren Sie den Lagrange-Multiplikator λ, indem Sie eine der Gleichungen mit x und eine der Gleichungen mit y multiplizieren.

b) Beantworten Sie (mit 'ja' oder 'nein', *und mit kurzer Begründung!*):

(i) Nimmt f auf $D_{f,1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 100\}$ ein Minimum an?

(ii) Nimmt f auf $D_{f,2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ ein Maximum an?

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(0, 0)$ weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum annimmt.

(7+2+3=12 Punkte)

Lösung A1:

a) Wir setzen $g(x,y) := x^2+y^2-1$ zur Beschreibung der Nebenbedingung durch $g(x,y)=0$. Wir berechnen

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+4y+4 \\ 4x+2y \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Das Lagrange-System lautet also:

$$\begin{array}{llcll} \text{(I)} & x+2y+2 & = & \lambda\, x & |\cdot y \\ \text{(II)} & 2x+y & = & \lambda\, y & |\cdot x \\ \text{(III)} & x^2+y^2 & = & 1 & \end{array}$$

Nachdem wir (I) mit y und (II) mit x multipliziert haben, bilden wir die Differenz, um λ zu eliminieren:

$$\begin{array}{l} 0 = y(x+2y+2) - x(2x+y) = xy + 2y^2 + 2y - 2x^2 - xy \\ \Leftrightarrow x^2 = y^2 + y \end{array}$$

Zusammen mit (III) wird x eliminiert:

$$\begin{array}{ll} & 1-y^2 = y^2+y \\ \Leftrightarrow & 2y^2+y-1=0 \\ \Leftrightarrow & y^2+\frac{1}{2}y-1=0 \\ \Leftrightarrow & y_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Mit Hilfe von (III) bekommen wir die zugehörigen x-Koordinaten:

$$\begin{array}{lll} y_1 = -1 & \Rightarrow & x_1 = 0 \\ y_2 = \frac{1}{2} & \Rightarrow & x_{2a,2b} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}$$

Die kritischen Punkte sind also $(0,-1)$, $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$
Es ist

$$\begin{array}{l} f(0,-1) = 1 \\ f(+\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} + \sqrt{3} + \frac{1}{4} + 2\sqrt{3} = 1 + 3\sqrt{3} \\ f(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \sqrt{3} + \frac{1}{4} - 2\sqrt{3} = 1 - 3\sqrt{3} \end{array}$$

Ergebnis: Maximum $= 1 + 3\sqrt{3}$, Minimum $= 1 - 3\sqrt{3}$

b) (i) f stetig & $D_{f,1}$ kompakt $\Rightarrow$ f nimmt Minimum an

(ii) $f\underbrace{(x,x)}_{\in D_{f,2}\forall x} = 6x^2 + 4x \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow f$ nimmt kein Maximum an

c) Variante 1:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{insbes. } Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &p(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 4\lambda - 12 \overset{!}{=} 0 \\ &\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2 \pm 4 \\ &\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 6 > 0 \\ \lambda_2 = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ ist keine lokale Extremstelle} \end{aligned}$$

Variante 2: Man zeigt, dass es in *jeder* Umgebung von $(0,0)$ eine Stelle mit $f < 0$ und eine Stelle mit $f > 0$ existiert. Dazu kann man z.B. $f(x,0) = x^2{+}4x = x(x{+}4)$ betrachten, was an der Stelle $x{=}0$ einen Vorzeichenwechsel hat, d.h. $f(x,0)$ ist positiv für positives, beliebig kleines x, und ist negativ für negatives, betragsmäßig kleines x.

A2) (Kurven)
Es sei eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ durch die Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,t^2 \\ (2t+1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \quad t \in [0,2],$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

b) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve im Punkt $(\frac{3}{2}, 3\sqrt{3})$. Geben Sie die Tangentengleichung in der Form $y = ax+b$ an.

(5+3=8 Punkte)

Lösung A2:

a)

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}\,'(t) &= \begin{pmatrix} 3t \\ 3\,(2t+1)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\
\|\vec{\gamma}\,'(t)\| &= \sqrt{(3t)^2 + 3^2(2t{+}1)} = 3\,\sqrt{t^2+2t+1} \\
&= 3\sqrt{(t+1)^2} = 3\,|t{+}1| = 3\,(t{+}1) \text{ für } t\in[0,2] \\
L(\Gamma) &= \int\limits_0^2 \|\vec{\gamma}\,'(t)\|\,dt = \int\limits_0^2 3\,(t{+}1)\,dt = 3\,\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^2 = 3\,(2{+}2) = 12
\end{aligned}$$

b) $(\frac{3}{2}, 3\sqrt{3})$ ist Punkt der Kurve für Parameterwert $t{=}1$,

$$\vec{\gamma}\,'(1) \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Tangentengleichung in Parameterform: $T(s) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} + s\,\begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$

Umformung:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad x = \tfrac{3}{2} + 3s \\
&(2)\quad y = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}s
\end{aligned}$$

(1) nach s auflösen ergibt $s = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$; in (2) eingesetzt:

$$y = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}x + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

A3) (Differentialgleichungen)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = e^{y+2t}, \quad y(0) = 0.$$

b) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem für die lineare Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' + 2y = 3\,e^{-2t}t^2.$$

d) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3+3+3+3=12 Punkte)

Lösung A3:

a)

$$y' = e^y e^{2t}, \quad t_0 = 0, \quad y_0 = 0$$

Trennung der Variablen (man kann *mit* Grenzen/Anfangswerten rechnen, so wie hier, oder auch *ohne* Grenzen d.h. mit Integrationskonstante, die man am Ende durch die Anfangswerte bestimmt):

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{e^y} &= e^{2t}\,dt \\
\int_0^{y(t)} e^{-\eta}\,d\eta &= \int_0^t e^{2\tau}\,d\tau \\
\Leftrightarrow -e^{-\eta}|_0^{y(t)} &= \frac{1}{2}\,e^{2\tau}|_0^t \\
\Leftrightarrow 1 - e^{-y(t)} &= \frac{1}{2}\,e^{2t} - \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow e^{-y(t)} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{2t} \\
\Leftrightarrow y(t) &= -\ln\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{2t}\right]
\end{aligned}$$

b) $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 13 \overset{!}{=} 0$
$\lambda_{1,2} ='' 3 \pm \sqrt{9-13}'' = 3 \pm 2i$
Ein komplexes Fundamentalsystem ist somit:

$$y_1(t) = e^{(3+2i)t},\ y_2(t) = e^{(3-2i)t}$$

Durch Bildung von $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ sowie von $\frac{1}{2i}(y_1-y_2)$ bekommt man ein reelles Fundamentalsystem:

$$\{e^{3t}\cos 2t, e^{3t}\sin 2t\}$$

c) Die *homogene* Dgl $y' = -2y$ hat Fundamentallösung $y_h(t) = e^{-2t}$.
Inhomogene Dgl / partikuläre Lsg. mittels Variation der Konstanten:
$y_p(t) = c(t)y_h(t)$
$\Rightarrow c'(t)y_h(t) = 3e^{-2t}t^2 \Rightarrow c'(t) = 3t^2$
Eine Lösung ist $c(t) = t^3 \Rightarrow y_p(t) = t^3e^{-2t}$
Die allgemeine Lösung ist also

$$y(t) = y_p(t) + \alpha\,y_h(t) = (\alpha + t^3)\,e^{-2t},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

d)

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)+4 \\
&= \lambda^2 - 6\lambda + 9 \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3
\end{aligned}
$$

Also: Doppelter Eigenwert. Suchen Eigenraum:

$$A-3Id = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenraum ist eindimensional, ein EV ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es ist also noch ein Hauptvektor zu bestimmen:

$$(A-3\mathrm{Id}|\vec{x}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ein zu $\vec{x}$ gehörender HV ist somit $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ein Fundamentalsystem ist somit

$$\{\vec{x}\, e^{3t}, (\vec{y}+t\vec{x})\, e^{3t}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}, \begin{pmatrix} 1+2t \\ -t \end{pmatrix} e^{3t} \right\}$$

A4) (Algebra)

a) Berechnen Sie $[4]_{15}^{-1}$ und $[11]_{27}^{-1}$ und $[15]_{17} \cdot [2]_{17}^{4}$.

b) Welche der drei Fehlerarten

(α) Einzelfehler,

(β) Nachbarvertauschungsfehler,

(γ) Vertauschungsfehler

kann mit folgender Prüfgleichung sicher erkannt werden? (kurze Begründungen!)

(i) Prüfgleichung

$$6d_1+5d_2+4d_3+3d_4+2d_5+d_6 \equiv 0 \pmod 7,$$

für einen Datensatz $(d_1, ..., d_5|d_6)$,

(ii) Prüfgleichung

$$2d_1+4d_2+5d_3+7d_4 \equiv 0 \pmod 9,$$

für einen Datensatz $(d_1, d_2, d_3|d_4)$.

(3+5=8 Punkte)

Lösung A4:

a) (i) $4 \cdot 4 = 16 \equiv 1 \pmod{15} \;\Rightarrow [4]_{15}^{-1} = [4]_{15}$

(ii)
$$\begin{array}{lll} 2 \cdot 11 = 22 & & \\ 3 \cdot 11 \equiv 33 \equiv 6 & \pmod{27} & \\ 4 \cdot 11 \equiv 6 + 11 \equiv 17 & \pmod{27} & \\ 5 \cdot 11 \equiv 17 + 11 \equiv 28 \equiv 1 & \pmod{27} & \Rightarrow [11]_{27}^{-1} = [5]_{27} \end{array}$$

(iii) $[15]_{17} \cdot [2]_{17}^4 = [-2]_{17} \cdot [16]_{17} = [-2]_{17} \cdot [-1]_{17} = [(-2)(-1)]_{17} = [2]_{17}$
(Statt mit Äquivalenzklassen kann man das ganze auch mit 'modulo' aufschreiben, also $15 \cdot 2^4 \equiv ... \equiv 2 \pmod{17}$.)

b) (i) 7 ist eine *Primzahl*, deswegen sind alle Gewichte 1,2,...,6 teilerfremd zu 7, somit werden alle Fehler (α) sicher erkannt. Die Differenzen der Gewichte sind ebenfalls teilerfremd, somit werden auch (β) und (γ) sicher erkannt.

(ii) Die Gewichte 2,4,5,7 sind teilerfremd zu 9
$\Rightarrow$ (α) sicher erkannt
Die Differenzen der Gewichte 4-2=2, 5-4=1, 7-5=2 sind teilerfremd zu 9
$\Rightarrow$ Fehler (β) sicher erkannt
Die Differenz 5-2=3 ist nicht teilerfremd zu 9
$\Rightarrow$ Fehler (γ) wird *nicht* sicher erkannt

(Summe: 40 Punkte)