Department Mathematik
Dr. rer. nat. Lars Schewe
Mathias Sirvent

WIRTSCHAFTS
MATHEMATIK

Wintersemester 2013/2014

Probeklausur
Mathematik für Ingenieure C3

Anmerkungen zur Klausur:

- Die Arbeitszeit wird 90 Minuten betragen.
- Sie können sämtliche schriftliche Unterlagen mitnehmen, ansonsten sind keinerlei technische Hilfsmittel erlaubt.
- Der mögliche Notenbonus aus den Übungen kommt nur dann zum Tragen, falls die Klausur am 31.03.2014 mit mindestens 4.0 bestanden wird.

Aufgabe 1

Betrachten Sie für $t \in [-6, 6]$ die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 5x^2 + txy + 2y^2 + z^2 \,\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Untersuchen Sie f auf lokale Minimal- und Maximalstellen.
Hinweis: Es existiert mindestens eine Extremstelle.

(b) Lassen sich auch globale Aussagen treffen? Begründen Sie ihre Entscheidung.

Aufgabe 2

Sei für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t \in [0, \infty)$,

$$f(x, t) = t \cdot \cos(x).$$

Wir wollen f minimieren und maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x, t) := \sin(x) - t = 0.$$

(a) Warum existieren Extremalstellen von f auf

$$N_g(0) := \{(x, t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \infty) : g(x, t) = 0\}$$

überhaupt?

(b) Berechnen Sie $f(0, t)$ für $(0, t) \in N_g(0)$, $f(\frac{\pi}{2}, t)$ für $(\frac{\pi}{2}, t) \in N_g(0)$
und $f(x, 0)$ für $(x, 0) \in N_g(0)$.

(c) Begründen Sie, dass $f(x,t) \geq 0 \; \forall \; x \in N_g(0)$.

(d) Geben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x,t,\lambda)$ an. Berechnen Sie die kritischen Stellen der Lagrangefunktion.

Hinweis: Betrachten Sie das Additionstheorem für den Kosinus: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Aufgabe 3

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -y\sin(x).$$

Welche der gefundenen Lösungen erfüllt die Anfangsbedingung $y(0) = 1$?

(b)

$$y''' + \frac{3}{t}y'' + y' + \frac{1}{t}y = 0, t > 0. \tag{1}$$

i. Zeigen Sie, dass $y(t) = \frac{1}{t}$ eine Lösung von (1) ist.

ii. Schreiben Sie die Differentialgleichung (1) in ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung um und bestimmen Sie eine Lösung dieses Systems.

Aufgabe 4

(a) Wie viele Elemente hat die Multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_{370}^*$?

(b) Betrachten Sie die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_{15}^*$?

i. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_{15}^*$?

ii. Ist $\mathbb{Z}_{15}^*$ zyklisch?

(c) Entscheiden Sie bei den folgenden Abbildungen, ob es sich um einen Gruppenhomomorphismus/Gruppenisomorphismus handelt?

i. $\varphi_1 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), x \mapsto x^2$

ii. $\varphi_2 : (\mathbb{Z}, +) \to (2\mathbb{Z}, +), x \mapsto 4x$

(d) Betrachte $G := \{x \in \mathbb{R} : \, x > 1\}$ und definiere $a \circ b := ab - a - b + 2$ für alle $a, b \in G$. Zeige

i. G ist abgeschlossen unter $\circ$.

ii. G ist mit dieser Verknüpfung eine abelsche Gruppe

Aufgabe 5

Betrachten Sie die folgenden Optimierungsprobleme:

$$\max\left\{c^T x \,|\, x \in \mathbb{R}^n, \; Ax = b, x \geq 0\right\} \tag{1}$$

und

$$\min\left\{y^T b \,|\, y \in \mathbb{R}^m, \; y^T A \geq c\right\}. \tag{2}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Seien x^* und y^* Optima von (1) und (2) mit $c^T x^* = (y^*)^T b$. Zeigen Sie folgende Aussagen für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

- $x_i^* > 0 \Longrightarrow ((y^*)^T A)_i = c_i$
- $((y^*)^T A)_i > c_i \Longrightarrow x_i^* = 0$

Wir wünschen viel Erfolg bei der "richtigen" Klausur am 31.03.2014!