Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Dr. Alexander Prechtel

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG

Klausur - 9.10.2017

Mathematik für Ingenieure C2 SoSe17

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 90 Minuten.
Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Die Gesamtpunktzahl beträgt 43 Punkte.
Vergessen Sie nicht, das Angabenblatt abzugeben!

Aufgabe A1

a) Auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ sei die Funktion

$$g(x) := -x \sin x + \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2}$$

gegeben. Zeigen Sie: g hat im Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ genau eine Nullstelle.

b) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3+y^3+2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f unstetig ist.

c) Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := e^{x^2+y}$ die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$.

(4 + 2 + 4 = 10 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe A2

a) Untersuchen Sie die Reihe auf ihr Konvergenzverhalten (absolute Konvergenz / Konvergenz / Divergenz). Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich und den Grenzwert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (Fallunterscheidung!).

c) Betrachten Sie die Potenzreihe

$$P(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n+2}.$$

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $P(x)$ und für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ divergiert sie?

(ii) Zeigen Sie, dass im Inneren des Konvergenzintervalls die Beziehung

$$P'(x) - 2\frac{P(x)}{x} = \frac{x^2}{1-x}$$

gilt.

(2 + 5 + (4 + 3) = 14 Punkte)

Aufgabe A3

a) Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen:
(i) $\int x\, e^{-x^2}\, dx$ (ii) $\int \cos x \cos 2x\, dx$.

b) Prüfen Sie, ob das folgende Integral existiert und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert (Fallunterscheidung):

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{\alpha x} \mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

((2 + 3) + 5 = 10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind. Falsch gesetzte Kreuze führen zu Punktabzug. Jeder Aufgabenblock A4) bis A6) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

Aufgabe A4

W F Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d$ ist genau dann komponentenweise konvergent, wenn sie bzgl. der $\|.\|_\infty$-Norm konvergent ist.

W F Existieren für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen, dann ist f stetig.

W F Der Gradient von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\vec{x}$ zeigt stets in Richtung der Niveaumenge $M_c = \{\vec{x} | f(\vec{x}) = c\}$.

(3 Punkte)

Aufgabe A5 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^3$.

W F Falls $f'(x) = 0 \land f''(x) > 0$ ist x ein globales Minimum.

W F Falls $f'(x) = f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$, dann ist x ein Sattelpunkt.

W F Die Tangente an f in x_0 lautet $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

(3 Punkte)

Aufgabe A6 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $x_* \in (a,b)$, $n, k \in \mathbb{N}_0$.

W F Für das Taylor-Polynom n-ten Grades zur Stelle x_* gilt: $T_n^{(k)}(x_*) = f^{(k)}(x_*) \forall k \leq n$.

W F Die Taylor-*Reihe* $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert immer gegen $f(x)$.

W F Die Taylor-*Reihe* $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Potenzreihe.

(3 Punkte)

Viel Erfolg!