Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor **SoSe 2015**
Version 7.5-ECTS-Modul (INF,IP,PhM) **Mittwoch, 30.03.2016**
Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Konvergenz: Potenzreihen, Funktionengrenzwerte, Konvergenz von Folgen)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(2+(-1)^k\right)^{2k} x^k \,, \quad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{e}{k}\right)^{k^2} x^k$$

b) Berechnen Sie die folgenden Funktionengrenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x}{e^{-x}-1} \,, \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{\sin^3(x)}$$

c) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv gegeben ist durch

$$a_{n+1} := a_n \sin(a_n)$$

und $a_1 := \frac{\pi}{4}$.

(i) Zeigen Sie per Vollständiger Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: $a_n \in (0,\pi)$.

(ii) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend oder fallend ist.

(iii) Begründen Sie, dass die Folge konvergiert.

(iv) Berechnen Sie den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.

(4 + 5 + 6 = 15 Punkte)

A2) (Stammfunktionen)

Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a) $$\int \frac{e^{\sqrt[5]{x}}}{x^{4/5}}\,dx \qquad (x>0)$$

b) $$\int (1+x^2)\,\ln x\,dx \qquad (x>0)$$

(4 + 4 = 8 Punkte)

A3) (Taylor-Entwicklung)
Sei

$$f(x) = 3 + \cos(\sin x) - \sin(2x)\,.$$

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$ das Taylor-Polynom T_1 ersten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_1 aus a) das Restglied R_1 an.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_1 an der Stelle $x \in \mathbb{R}$. Diese Schranke soll die Form $|R_1(x)| \leq c\,x^2\,\forall\, x \in \mathbb{R}$ haben, für ein zu findendes $c \in \mathbb{R}$.

d) Begründen Sie, warum es eine Umgebung $U := (-\epsilon, \epsilon)$ von $x_* = 0$ gibt, so dass $f : U \to f(U)$ bijektiv ist und somit eine Umkehrfunktion hat.

e) Stellen Sie zum Entwicklungspunkt $y_* := f(0)$ das Taylor-Polynom ersten Grades für die <u>Umkehr</u>funktion von f auf.

(4 + 2 + 2 + 1 + 2 = 11 Punkte)

A4) (Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$: Unstetigkeit, Gradient)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3 + xy}{x^2+y^2} & ,\ \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f unstetig ist.

b) Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = x^y$

$$\nabla f(2,3)\,.$$

(4+3=7 Punkte)

(Summe: 41 Punkte)