Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor **SoSe 2015**
Version 7.5-ECTS-Modul (INF,IP,PhM) **Mittwoch, 30.03.2016**
Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Konvergenz: Potenzreihen, Funktionengrenzwerte, Konvergenz von Folgen)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 + (-1)^k\right)^{2k} x^k, \quad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{e}{k}\right)^{k^2} x^k$$

b) Berechnen Sie die folgenden Funktionengrenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\, e^x}{e^{-x} - 1}, \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin^3(x)}$$

c) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv gegeben ist durch

$$a_{n+1} := a_n \sin(a_n)$$

und $a_1 := \frac{\pi}{4}$.

(i) Zeigen Sie per Vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \in (0, \pi)$.

(ii) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend oder fallend ist.

(iii) Begründen Sie, dass die Folge konvergiert.

(iv) Berechnen Sie den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.

(4 + 5 + 6 = 15 Punkte)

Lösung:

a) (i) $\limsup_k \sqrt[k]{\left|(2+(-1)^k)^{2k}\right|} = \left(\limsup_k \underbrace{(2+(-1)^k)^{2k})}_{1,3,1,3,1,3,\ldots}\right)^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow$
$R = \frac{1}{9}$

(ii) $\sqrt[k]{\left|\left(1+\frac{e}{k}\right)^{k^2}\right|} = \left(1+\frac{e}{k}\right)^k \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} e^e \Rightarrow R = \frac{1}{e^e}$ was man auch als e^{-e} schreiben kann.

b) (i) $\lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x}{e^{-x}-1} \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + x\,e^x}{-e^{-x}} = \frac{1+0}{-1} = -1$

(ii) Vorbemerkung: Das Auseinanderziehen des Bruchs in eine Differenz von zwei Brüchen bringt nichts, da der Typus "$\infty - \infty$"ist.
Am besten benutzt man die Ableitung $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ (s. A23 Blatt 8)
$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin^3(x)} \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2(x) - 1}{3\sin^2(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{3\sin(x)^2\cos(x)}$
$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos^3(x)} = \frac{1}{3}$
An der Stelle (*) haben wir $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ersetzt und dann gekürzt.
<u>Bem.</u>: Wenn man stattdessen an der Stelle (*) erneut Hospital anwendet, führt das auf keinen grünen Zweig: ($\ldots \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \frac{2(1+\tan^2 x)\tan x}{6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x} = \ldots ?$)

<u>Variante</u>: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin^3(x)} \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{3\sin^2(x)\cos(x)}$
$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3\sin^2(x)\cos(x)} \overset{\text{(erweitern)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3\sin^2(x)\cos(x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{3\sin^2(x)\cos(x)^3}$
$\overset{\text{(kürzen)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos(x)^3} = \frac{1}{3}$

<u>Weitere Variante</u>: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - x}{\sin^3(x)} \overset{\text{(erweitern)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x\cos x}$
$\overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3\sin^2 x\cos x - \sin^4 x} \overset{\text{(kürzen)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x}{3\sin x\cos x - \sin^3 x}$
$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos x - \sin^2 x} = 1 \cdot \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3}$, wobei man an der Stelle (*) alternativ auch erneut Hospital anwenden könnte.

c) (i) <u>I.A. ($n=1$)</u>: $a_1 = \frac{\pi}{4} \in (0,\pi)$ ist erfüllt.
<u>I.A. ($n \to n{+}1$)</u>: Es gelte $a_n \in (0,\pi)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (=I.V.)
$\Rightarrow a_{n+1} = \underbrace{a_n}_{0<\ldots<\pi \text{ n.I.V.}} \cdot \underbrace{\sin(a_n)}_{0<\ldots\le 1} \in (0,\pi)$

(ii) Variante 1: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sin a_n \leq 1 \;\Rightarrow\;$ Folge ist monoton fallend
Variante 2: $a_{n+1} - a_n = \underbrace{a_n}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(\sin a_n - 1)}_{\leq 0} \leq 0 \;\Rightarrow\;$ Folge ist monoton fallend

(iii) Die Folge ist nach (ii) monoton fallend und nach (i) nach unten beschränkt (durch 0). Nach einem Satz der Vorlesung folgt daraus die Konvergenz der Folge.

(iv) Indem man in der Rekursionsvorschrift auf beiden Seiten den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}$ bildet, bekommt man für den gesuchten Grenzwert die Gleichung $a = a \sin(a)$.
Sofern $a \neq 0$, folgt durch Division $a = \sin(a)$. (Variante: Man bringt alles auf eine Seite und faktorisiert: $0 = a \cdot (1 - \sin(a))$.)
Also: Damit $\sin(a) = 0$ sein kann muss, da man aus (i) ferner $a \in [0, \pi]$ schließen kann, $a = \frac{\pi}{2}$ sein. Ferner nicht zu vergessen: Die Möglichkeit $a = 0$.
Ist $a_1 = \frac{\pi}{4}$, so muss wegen der Monotonie der Folge $a \leq \frac{\pi}{4}$ sein; es scheidet also $a = \frac{\pi}{2}$ aus und es bleibt $a = 0$ als Ergebnis.

Zur Bewertung: In c) ergeben (ii) und (iii) jeweils 1 Punkt. In b) soll (i) 2 Punkte und (ii) 3 Punkte ergeben.

A2) (Stammfunktionen)

Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt[5]{x}}}{x^{4/5}}\,dx \qquad (x>0)$

b) $\displaystyle\int (1+x^2)\,\ln x\,dx \qquad (x>0)$

(4 + 4 = 8 Punkte)

Lösung:

a) Da die Ableitung von $x^{\frac{1}{5}}$ bis auf Vorfaktor gleich $x^{-\frac{4}{5}}$ ist, liegt es nahe, eine Substitution $y := x^{\frac{1}{5}}$ durchzuführen. Wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ bekommen wir
$$\int \frac{e^{\sqrt[5]{x}}}{x^{4/5}}\,dx = \int 5\,e^y\,dy = 5\,e^y = 5\,e^{\sqrt[5]{x}}$$

b) Wir entscheiden uns für partielle Integration, denn wenn man 'ln' ableitet und das Polynom integriert, ist sofort klar, dass der Integrand zu einem Polynom wird, was man problemlos weiterbehandeln kann:
$$\int (1+x^2)\,\ln x\,dx = \left(x+\tfrac{x^3}{3}\right)\cdot \ln x - \int \left(x+\tfrac{x^3}{3}\right)\cdot \tfrac{1}{x}\,dx$$
$$= \left(x+\tfrac{x^3}{3}\right)\ln x - \int \left(1+\tfrac{x^2}{3}\right)\,dx = \left(x+\tfrac{x^3}{3}\right)\ln x - \left(x+\tfrac{x^3}{9}\right)$$
Bemerkung: Eine Substitution $y := \ln x$ ist weniger empfehlenswert; man kommt damit auf $\int (e^y + e^{3y})y\,dy$, was anschließend partiell integriert werden muss.

A3) (Taylor-Entwicklung)
Sei
$$f(x) = 3 + \cos(\sin x) - \sin(2x)\,.$$

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$ das Taylor-Polynom T_1 ersten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_1 aus a) das Restglied R_1 an.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_1 an der Stelle $x \in \mathbb{R}$. Diese Schranke soll die Form $|R_1(x)| \leq c\,x^2 \,\forall\, x \in \mathbb{R}$ haben, für ein zu findendes $c \in \mathbb{R}$.

d) Begründen Sie, warum es eine Umgebung $U := (-\epsilon, \epsilon)$ von $x_* = 0$ gibt, so dass $f : U \to f(U)$ bijektiv ist und somit eine Umkehrfunktion hat.

e) Stellen Sie zum Entwicklungspunkt $y_* := f(0)$ das Taylor-Polynom ersten Grades für die <u>Umkehr</u>funktion von f auf.

$(4 + 2 + 2 + 1 + 2 = 11$ Punkte$)$

Lösung:

a) $f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x - 2\cos(2x)$
$f(0) = 3 + 1 - 0 = 4$
$f'(0) = 0 - 2 = -2$
Ergebnis: $T_1(x) = f(0) + f'(0)x = 4 - 2x$

b) $f''(x) = -\cos(\sin x)\cdot\cos^2 x + \sin(\sin x)\cdot\sin x + 4\sin(2x) R_1(x) = \frac{1}{2!} f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}[-\cos(\sin\xi)\cdot\cos^2\xi + \sin(\sin\xi)\cdot\sin\xi + 4\sin(2\xi)]\, x^2$,
wobei ξ zwischen 0 und x

c) Wir schätzen einfach, nach Verwendung der Dreiecksungleichung, jeden Sinus- und Kosinus-Term betragsmäßig durch Eins ab:
$|R_1(x)| \leq \frac{1}{2}\,(1 + 1 + 4)\,|x|^2 = 3x^2$

d) Nach a) ist $f'(0) = -2 \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f' gibt es daher ein Intervall um 0, auf dem f' ungleich null (bzw.: negativ) ist. Nach einem Satz ist auf diesem Intervall f streng monoton und somit injektiv. Die Surjektivität der betrachteten Abbildung ist trivial. Also ist die betrachtete Abbildung bijektiv und hat somit eine Umkehrfunktion f^{-1}
An die Tutoren: Wenn hier nicht ganz so ausführlich argumentiert wird; es sollte zumindest $f'(0)$ ungleich (oder kleiner) null, f' auf einer Umgebung ungleich (oder kleiner) null und 'injektiv' vorkommen. Da die Surjektivität offensichtlich ist, ist es m.E. nicht ganz so schlimm, wenn man sie nicht erwähnt.

e) $y_* = f(0) = 4,\ f^{-1}(y_*) = 0$
$\tilde{T}(y) = f^{-1}(y_*) + {f^{-1}}'(y_*)(y - y_*)$ wobei ${f^{-1}}'(y_*) = \frac{1}{f'(x_*)} \overset{a)}{=} \frac{1}{-2}$
Ergebnis: $\tilde{T}(y) = 0 - \frac{1}{2}\,(y - 4) = -\frac{1}{2}\,(y - 4)$

A4) (Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$: Unstetigkeit, Gradient)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+xy}{x^2+y^2} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f unstetig ist.

b) Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = x^y$

$$\nabla f(2,3)\,.$$

(4+3=7 Punkte)

Lösung:

a) Eine mögliche Vorüberlegung: Nähern wir uns dem Nullpunkt entlang von Koordinatenachsen, d.h. betrachten wir $f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x$ oder $f(0,y) = \frac{y^3}{y^2} = y$, so ist der Polynomgrad des Zählers immer größer als der des Nenners, und im Grenzwert bekommen wir Null. Um die Unstetigkeit zu zeigen, benötigen wir aber einen Grenzwert, der ungleich $f(0,0) = 0$ ist. Wie sorgen wir dafür, dass der Polynomgrad im Zähler kleiner wird? Wir müssen x und y so wählen, dass im Zähler die Terme hoher Ordnung wegfallen. Die einzige Wahl, die das leistet, ist $y = -x$.[1]
Also:
Wähle z.B. $x_n := \frac{1}{n}$ und $y_n := -\frac{1}{n}$. Dann bekommen wir $(x_n, y_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} (0,0)$, aber
$f(x_n,y_n) = \dfrac{0 - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$
Daraus folgt die Unstetigkeit von f an der Stelle $(0,0)$.

Das kann man auch so aufschreiben:
Betrachte $\lim\limits_{x\to 0} f(x,-x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+(-x)^3+x(-x)}{x^2+(-x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$
<u>Alternative</u>: Es funktioniert auch 'die andere Diagonale':
$\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^3+x^2}{x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

b) $\frac{d}{dx} x^y = y\, x^{y-1}$
$\frac{d}{dy} x^y = \frac{d}{dy} e^{y \ln x} = \ln x \cdot e^{y \ln x} = x^y \ln x$

[1] Man kann stattdessen aber auch einfach ein bisschen herumprobieren, so kommt man auch zum Ziel.

$$\nabla f(2,3) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^2 \\ 2^3 \ln 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \ln 2 \end{pmatrix}$$

(Summe: 41 Punkte)