Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor **SoSe 2015**

Version 7.5-ECTS-Modul (INF,IP,PhM) **Mittwoch, 30.09.2015**

Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Konvergenz: Reihen, Potenzreihen, Funktionengrenzwerte)

a) Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,e^k}{k!} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (2+\sin k)^k \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$$

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\ln 3}{k}\right)^{k^2} x^k$$

c) Berechnen Sie den folgenden Funktionengrenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+4x+x^2)}$$

(2+2+1 + 2 + 3 = 10 Punkte)

A2) (Ableitung und Stammfunktion)

a) Prüfen Sie, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin(\sqrt{|x|})\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist. Falls ja, geben Sie $f'(0)$ an.

b) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion:

(i) $\displaystyle\int \frac{\sin(2\ln x)}{x}\,dx \qquad (x>0)$

(ii) $\displaystyle\int \sinh(x)\cosh(\alpha x)\,dx$, wobei $\alpha\in\mathbb{R}$ mit $\alpha>0$ beliebig.

Hinweis zu (ii): Ihr Lösungsweg erfordert vermutlich eine Fallunterscheidung bzgl. α.

Bemerkung: Es ist *nicht* gestattet, das Ergebnis ohne Rechnung z.B. einer Formelsammlung zu entnehmen.

(3 + 3+7 = 13 Punkte)

A3) (Taylor-Entwicklung)

a) Sei

$$f(x) = 3 + x + \int_2^x \sin(e^{t-1})\,dt\,.$$

(i) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = 2$ das Taylor-Polynom T_1 ersten Grades auf.

(ii) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_1 aus (i) das Restglied R_1 an.

(iii) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_1 an der Stelle $x \in [1,3]$.
Diese Schranke soll die Form $|R_1(x)| \leq c\,|x-2|^2\,\forall x \in [1,3]$ haben, für ein zu findendes $c \in \mathbb{R}$.

b) Stellen Sie zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$

(i) das Taylor-Polynom dritten Grades für $f(x) = \exp(-x^3)$ und

(ii) das Taylor-Polynom fünften Grades für $f(x) = x\cos(4x)$

auf.
<u>Hinweis:</u> Es ist möglich, b) *mit sehr wenig Rechenaufwand* zu lösen.

(2+2+2 + 2+2 = 10 Punkte)

A4) (Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$: Unstetigkeit, Stetige Fortsetzbarkeit)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+|y|)^3}{(|x|+|y|)^3} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f unstetig ist.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+2y^2)}{2x^2+4y^2} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ c & , \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Gibt es einen Wert $c \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion g stetig an der Stelle $(0,0)$ ist? Wenn ja, welcher Wert?

(3+3=6 Punkte)

(Summe: 39 Punkte)