Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor **SoSe 2015**

Version 7.5-ECTS-Modul (INF,IP,PhM) **Mittwoch, 30.09.2015**

Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Konvergenz: Reihen, Potenzreihen, Funktionengrenzwerte)

a) Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,e^k}{k!} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (2+\sin k)^k \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$$

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\ln 3}{k}\right)^{k^2} x^k$$

c) Berechnen Sie den folgenden Funktionengrenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+4x+x^2)}$$

(2+2+1 + 2 + 3 = 10 Punkte)

Lösung:

a) (i) Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{\left|\frac{k\,e^k}{k!}\right|} = \frac{\overbrace{\sqrt[k]{k}}^{\to 1}\;e}{\underbrace{\sqrt[k]{k!}}_{\to\infty}} \stackrel{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0 < 1 \;\Rightarrow$ Reihe konvergent

Alternative: Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)e^{k+1}k!}{(k+1)!ke^k} = \frac{e\,(k+1)}{(k+1)\,k} = \frac{e}{k} \stackrel{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0 < 1 \;\Rightarrow$ Reihe konvergent

Bem.: Divergenzkriterium: hier nicht anwendbar

(ii) Am einfachsten: "Divergenzkriterium": Es ist $(\overbrace{2+\sin k}^{\geq 1})^k \geq 1^k = 1$, somit ist $(2+\sin k)^k$ nicht Nullfolge $\Rightarrow$ Reihe divergent

Alternative: Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{|(2+\sin k)^k|} = 2 + \sin k \geq 1\ \forall k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow$ Reihe divergent

Bem.: Daraus, dass hier der Limes Superior der obigen Folge = 3 und somit > 1 ist, lässt sich auch auf die Konvergenz der Reihe schließen. Dies wurde als richtig gewertet (obwohl eigentlich ein nicht ganz trivialer Beweis dieser Eigenschaft nötig wäre).

Bem.: Quotientenkriterium: hier vmtl. nicht anwendbar

(iii) Leibniz-Kriterium: $(\ln k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und geht gegen unendlich, also ist $(1/\ln k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge. Nach Leibniz-Kriterium ist Reihe konvergent

Bem.: Quotientenkriterium: hier nicht anwendbar, da $|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ von *unten* gegen 1 geht.

b) $\sqrt[k]{\left|\left(1+\frac{\ln 3}{k}\right)^{k^2}\right|} = \left(1+\frac{\ln 3}{k}\right)^k \stackrel{(k\to\infty)}{\longrightarrow} e^{\ln 3} = 3 \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{3}$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(\overbrace{1+x}^{\to 1})}^{\to 0}}{\underbrace{\ln(\underbrace{1+4x+x^2}_{\to 1})}_{\to 0}} \stackrel{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+4x+x^2}(4+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1+4x+x^2}^{\to 1}}{\underbrace{(1+x)}_{\to 1}\underbrace{(4+2x)}_{\to 4}} = \frac{1}{4}$$

A2) (Ableitung und Stammfunktion)

a) Prüfen Sie, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin(\sqrt{|x|})\sin(\frac{1}{x})\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist. Falls ja, geben Sie $f'(0)$ an.

b) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion:

(i) $\displaystyle\int \frac{\sin(2\ln x)}{x}\,dx \qquad (x>0)$

(ii) $\displaystyle\int \sinh(x)\cosh(\alpha x)\,dx\,,$ wobei $\alpha\in\mathbb{R}$ mit $\alpha>0$ beliebig.

Hinweis zu (ii): Ihr Lösungsweg erfordert vermutlich eine Fallunterscheidung bzgl. α.

Bemerkung: Es ist *nicht* gestattet, das Ergebnis ohne Rechnung z.B. einer Formelsammlung zu entnehmen.

(3 + 3+7 = 13 Punkte)

Lösung:

a) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)\sin(\sqrt{|h|})\sin(\frac{1}{h})-0}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{=1}\cdot\lim_{h\to 0}\underbrace{\overbrace{\sin\sqrt{|h|}}^{\to 0}\,\overbrace{\sin\frac{1}{h}}^{\text{beschr.}}}_{\to 0} = 0$$

Also: $f'(0)$ existiert und ist $= 0$.

b) (i) Mit Substitution $y := \ln x$ (also $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, also $dy = \frac{dx}{x}$):

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin(2\ln x)}{x}\,dx &= \int \sin 2y\,dy = -\frac{1}{2}\cos 2y \\ &= -\frac{1}{2}\cos(2\ln y)\end{aligned}$$

(ii) Vorbemerkung: Es gibt verschiedene Lösungswege und verschiedene Darstellungen des Ergebnisses.
M.E. der naheliegendste Weg: Mit partieller Integration:
Davon gibt es 2 Varianten, je nachdem welchen Faktor man ableitet bzw. integriert; beide führen zum Ziel:
Variante 1 (ist die etwas angenehmere Variante):

$$\int \underbrace{\sinh x}_{\text{int.}} \underbrace{\cosh \alpha x}_{\text{abl.}}\, dx \overset{\text{p.I.}}{=} \cosh x \cosh \alpha x - \int \underbrace{\cosh x}_{\text{int.}} \cdot \alpha \underbrace{\sinh \alpha x}_{\text{abl.}}\, dx$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \cosh x \cosh \alpha x - \alpha(\sinh x \sinh \alpha x - \int \sinh x \cdot \alpha \cosh \alpha x \, dx$$

$$= \cosh x \cosh \alpha x - \alpha \sinh x \sinh \alpha x + \alpha^2 \int \sinh x \cosh \alpha x \, dx$$

$\Rightarrow\ (1-\alpha^2) \int \sinh x \cosh \alpha x \, dx = \cosh x \cosh \alpha x - \alpha \sinh x \sinh \alpha x$
Falls $\alpha \neq 1$ können wir durch $(1-\alpha^2)$ dividieren:

$$\Rightarrow \int \sinh x \cosh \alpha x \, dx = \frac{\cosh x \cosh \alpha x - \alpha \sinh x \sinh \alpha x}{1-\alpha^2}$$

Sonderfall $\alpha=1$: Wie oben bereits berechnet haben wir
$\int \sinh x \cosh x \, dx \overset{\text{p.I.}}{=} \cosh x \cosh x - \int \cosh x \sinh x \, dx$
$\Rightarrow 2 \int \sinh x \cosh x \, dx = \cosh^2 x$

$$\Rightarrow \int \sinh x \cosh x \, dx = \frac{1}{2} \cosh^2 x$$

Variante 2:

$$\int \underbrace{\sinh x}_{\text{abl.}} \underbrace{\cosh \alpha x}_{\text{int.}}\, dx \overset{\text{p.I.}}{=} \sinh x \cdot \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha x - \int \underbrace{\cosh x}_{\text{abl.}} \cdot \frac{1}{\alpha} \underbrace{\sinh \alpha x}_{\text{int.}}\, dx$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \frac{1}{\alpha} \sinh x \sinh \alpha x - \frac{1}{\alpha}(\cosh x \cdot \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha x - \int \sinh x \cdot \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha x \, dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sinh x \sinh \alpha x - \frac{1}{\alpha^2} \cosh x \cosh \alpha x + \frac{1}{\alpha^2} \int \sinh x \cosh \alpha x \, dx$$

$\Rightarrow\ (1-\frac{1}{\alpha^2}) \int \sinh x \cosh \alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha} \sinh x \sinh \alpha x - \frac{1}{\alpha^2} \cosh x \cosh \alpha x$
Falls $\alpha \neq 1$ können wir durch $(1-\frac{1}{\alpha^2})$ dividieren:
$\Rightarrow\ \int \sinh x \cosh \alpha x \, dx = \dfrac{\frac{1}{\alpha} \sinh x \sinh \alpha x - \frac{1}{\alpha^2} \cosh x \cosh \alpha x}{1-\frac{1}{\alpha^2}}$
Das kann man per Erweitern mit α^2 noch schöner schreiben:

$$\Rightarrow \int \sinh x \cosh \alpha x \, dx = \frac{\alpha \sinh x \sinh \alpha x - \cosh x \cosh \alpha x}{\alpha^2-1}$$

Sonderfall $\alpha = 1$: Wie oben bereits berechnet haben wir
$\int \sinh x \cosh x \, dx \overset{\text{p.I.}}{=} \sinh x \sinh x - \int \cosh x \sinh x \, dx$
$\Rightarrow 2 \int \sinh x \cosh x \, dx = \sinh^2 x$

$$\Rightarrow \int \sinh x \cosh x \, dx = \frac{1}{2} \sinh^2 x$$

<u>Bem:</u> Dass im Fall $\alpha = 1$ einmal $\frac{1}{2} \sinh^2 x$ und einmal $\frac{1}{2} \cosh^2 x$ herauskommt, ist kein Widerspruch; beachte dass sich wegen $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ beide Lösungen nur um eine Konstante unterscheiden.

<u>Alternative für den Fall $\alpha = 1$:</u>
Substitution $y := \cosh x$ oder $y := \sinh x$ liefert ebenfalls eines der beiden obigen Ergebnisse.

<u>Alternativer Lösungsweg:</u> sinh und cosh durch exp ausdrücken:
$\int \sinh x \cosh \alpha x \, dx = \frac{1}{4} \int (e^x - e^{-x})(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) \, dx$
$= \frac{1}{4} \int (e^{(1+\alpha)x} - e^{-(1+\alpha)x} + e^{(1-\alpha)x} - e^{-(1-\alpha)x}) \, dx$
Nun Variante 1: sofort integrieren:
$\ldots = \frac{1}{4} [\frac{1}{1+\alpha}(e^{(1+\alpha)x} + e^{-(1+\alpha)x}) + \frac{1}{1-\alpha}(e^{(1-\alpha)x} + e^{-(1-\alpha)x})]$
$= \frac{1}{2} [\frac{1}{1+\alpha} \cosh((1+\alpha)x) + \frac{1}{1-\alpha} \cosh((1-\alpha)x)]$
oder Variante 2: wieder als Hyperbolicus-Funktionen ausdrücken, bevor man integriert:
$\ldots = \frac{1}{2} \int [\sinh((1+\alpha)x) + \sinh((1-\alpha)x)] \, dx$
$= \frac{1}{2} [\frac{1}{1+\alpha} \cosh((1+\alpha)x) + \frac{1}{1-\alpha} \cosh((1-\alpha)x)]$
Sonderfall $\alpha = 1$: In diesem Fall sind die Exponentialterme, die $(1-\alpha)$ enthalten, einfach *Konstanten*, und fallen beim Ableiten weg, bzw. der sinh-Term, der $(1-\alpha)$ enthält, ist identisch null, und erzeugt keinen cosh-Term.
Im Fall $\alpha = 1$ bekommen wir also als Ergebnis

$$\frac{1}{4} \cosh(2x)$$

<u>Bem.</u> zum Fall $\alpha \neq 1$: Drückt man das Ergebnis der Rechnung, die partielle Integration verwendet, mittels Exponentialfunktion aus, und multipliziert dann aus, so bekommt man diejenige Darstellung der Lösung, die oben als 'alternativer Lösungsweg' hergeleitet wurde, d.h. die Lösungen stimmen überein.

A3) (Taylor-Entwicklung)

a) Sei

$$f(x) = 3 + x + \int_2^x \sin(e^{t-1})\, dt\,.$$

(i) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = 2$ das Taylor-Polynom T_1 ersten Grades auf.

(ii) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_1 aus (i) das Restglied R_1 an.

(iii) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_1 an der Stelle $x \in [1,3]$.
Diese Schranke soll die Form $|R_1(x)| \leq c\,|x-2|^2\ \forall x \in [1,3]$ haben, für ein zu findendes $c \in \mathbb{R}$.

b) Stellen Sie zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$

(i) das Taylor-Polynom dritten Grades für $f(x) = \exp(-x^3)$ und

(ii) das Taylor-Polynom fünften Grades für $f(x) = x\cos(4x)$

auf.
<u>Hinweis:</u> Es ist möglich, b) *mit sehr wenig Rechenaufwand* zu lösen.

(2+2+2 + 2+2 = 10 Punkte)

Lösung:

a) (i) $f'(x) = 1 + \sin(e^{x-1})$
$f(2) = 3 + 2 + 0 = 5$
$f'(2) = 1 + \sin(e)$
$T_1(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = 5 + (1+\sin(e))(x-2)$

(ii) $f''(x) = \cos(e^{x-1})\, e^{x-1}$
$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)\,(x-2)^2 = \frac{1}{2}\, e^{\xi-1} \cos(e^{\xi-1})\,(x-2)^2$ wobei ξ zwischen x und 2

(iii) Für $x \in [1,3]$ ist $\xi \in [1,3]$ und wir bekommen die Abschätzung
$|R_1(x)| \leq \frac{1}{2}\, \underbrace{e^{\xi-1}}_{\leq e^2} \underbrace{|\cos(e^{\xi-1})|}_{\leq 1}\, |x-2|^2 \leq \frac{1}{2}\, e^2\, |x-2|^2$

b) (i) Wir nutzen gemäß eines Satzes der Vorlesung die Reihenentwicklung $\exp(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + ...$ mit $y := -x^3$ und erhalten
$T_3(x) = 1 + (-x)^3 = 1 - x^3$

(ii) Analog: $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - ...$ mit $y := 4x$, somit
$T_5(x) = x\,[1 - \frac{1}{2}\cdot(4x)^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}(4x)^4] = x\,(1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4) = x - 8x^3 + \frac{32}{3}x^5$

Bemerkung: Wenn man stattdessen alle Ableitungen bis zur geforderten Ordnung berechnet, dann "rechnet man sich leider zu Tode":

$f(x) = \exp(-x^3)$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -3x^2 \exp(-x^3)$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = (-6x + 9x^4) \exp(-x^3)$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = (-6 + 54x^3 - 27x^6) \exp(-x^3)$	$f'''(0) = -6$

$f(x) = x \cos(4x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(4x) - 4x \sin(4x)$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -8 \sin(4x) - 16x \cos(4x)$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -48 \cos(4x) + 64x \sin(4x)$	$f'''(0) = -48 = -8 \cdot 3!$
$f^{(4)}(x) = 256 \sin(4x) + 256x \cos(4x)$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = 1280 \cos(4x) - 1024x \sin(4x)$	$f^{(5)}(0) = 1280 = \frac{32}{3} \cdot 5!$

A4) (Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$: Unstetigkeit, Stetige Fortsetzbarkeit)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+|y|)^3}{(|x|+|y|)^3} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f unstetig ist.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+2y^2)}{2x^2+4y^2} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ c & , \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Gibt es einen Wert $c \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion g stetig an der Stelle $(0,0)$ ist? Wenn ja, welcher Wert?

(3+3=6 Punkte)

Lösung:

a) Vorüberlegung: Für positive x sind Zähler und Nenner identisch, d.h. man bekommt im Grenzwert immer 1 und kann so die Unstetigkeit *nicht* zeigen. Wichtig ist also, *negative* x zu betrachten. Am einfachsten wie folgt:
Wähle $x_n := \frac{1}{n}$ und $y_n := 0$. Dann bekommen wir $(x_n, y_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} (0,0)$, aber
$$f(x_n, y_n) = \frac{(-\frac{1}{n}+0)^3}{(\frac{1}{n}+0)^3} = -1 \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} -1 \neq 1 = f(0,0)$$
Daraus folgt die Unstetigkeit von f an der Stelle $(0,0)$.

b) Wir nutzen aus, dass $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ wobei wir $z := x^2+2y^2$ betrachten (beachte, dass dann z gegen null geht, wenn x und y gegen null gehen). Wir bekommen:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \overset{!}{=} f(0,0) = c$$
Ergebnis: g ist genau dann stetig, wenn $c = \frac{1}{2}$.

(Summe: 39 Punkte)

Punktevergabe bei A2 (ILS):

a)
In etwa 1P für das Aufstellen des Differenzenquotienten
und 1P für die Erkenntnis, dass man $\sin(h)/h$ abspalten sollte
und 1P für das Ergebnis.
Wenn nur der Diff.quot. aufgestellt und das Ergebnis $f'(0) = 0$ ohne klare Begründung angegeben wurde, habe ich 1.5P dafür gegeben.
Man könnte diskutieren, ob das Anwenden von Hospital auf den DQ ggf 0.5P Wert ist... zielführend ist Hospital hier m.E. nicht.

b)
Hier habe ich pro Fehler einen vollen Punkt abgezogen, auch bei Vorzeichenfehler oder bei "2" statt "1/2".

c)
2P: Die Erkenntnis, dass man partiell integrieren muss, und Durchführung der ersten part. Int.
2P: Durchführung der zweiten part. Int
0.5P: Hinüberbringen des Integrals auf die andere Seite
0.5P: Endergebnis
0.5P: Die Erkenntnis, dass $\alpha = 1$ ein Sonderfall ist
1.5: Lösen des Falls $\alpha = 1$
(Rechenfehler z.B. beim part. Int. habe ich nur recht schwach geahndet, mit 1P (oder 0.5P) Abzug jeweils.)

Für den alternativen Rechenweg, bei dem $\sinh, \cosh$ durch $\exp$ ausgedrückt werden:
5P für ein Ergebnis, das im Fall $\alpha \neq 1$ gültig ist, davon bis zu 3P., wenn $\exp$ eingeführt und das Produkt der Klammern ausmultipliziert wurde aber die Integration fehlt.
Zusätzlich 0.5P, wenn das Ergebnis wieder mit $\sinh, \cosh$ ausgedrückt wurde.
0.5P für die Erkenntnis, dass $\alpha = 1$ ein Sonderfall ist
1P für die Angabe des Ergebnisses im Fall $\alpha = 1$