Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor **SoSe 2014**
Version 7.5-ECTS-Modul (INF,IP,PhM) **Prof. Dr. S. Kräutle**
Freitag, 26.10.2014 **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Grenzwerte, Folgen, Reihen)

a) Berechnen Sie den folgenden Folgengrenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{e^n+1} - \sqrt{e^n-1}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Funktionengrenzwerte:

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{x\,\sin x}{e^{-2x}-1+2x} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+(\sin x)^2}{x^2}$$

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(4\sqrt[k]{\frac{3}{k}} + \frac{2}{\sqrt[k]{k!}}\right)^k x^k, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\cos\frac{1}{k}\right)^{-k} x^k$$

(3 + 3+3 + 3+2 = 14 Punkte)

A2) (Ableitung und Stammfunktion)

a) Prüfen Sie, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x^2)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist. Falls ja, geben Sie $f'(0)$ an.

b) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion:

$$\text{(i)} \quad \int (3+6x)\, e^{3x}\, dx, \qquad \text{(ii)} \quad \int 2x^3\, e^{-x^4}\, dx$$

Bemerkung: Es ist *nicht* gestattet, das Ergebnis ohne Rechnung z.B. einer Formelsammlung zu entnehmen.

(2 + 3+2 = 7 Punkte)

A3) (Taylor-Entwicklung)
Sei

$$f(x) = 1 + \frac{2x}{\pi} + \sin x \cos 2x\,.$$

a) (i) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = \frac{\pi}{2}$ das Taylor-Polynom T_1 ersten Grades auf.

(ii) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_1 aus (i) das Restglied R_1 an.

(iii) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_1 an der Stelle $x = x_* + \frac{1}{10}$.

Hinweis/zur Kontrolle: f'' hat die Form
$f''(x) = \alpha \sin x \cos 2x + \beta \cos x \sin 2x\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei unendlich oft differenzierbar. Ferner sei bekannt, dass $|g^{(n)}(x)| \leq n|x|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Folgt daraus, dass die Taylor-Reihe von g zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ gegen g konvergiert? (Begründung/Rechnung!)

(4+4+3 + 3 = 14 Punkte)

A4) (Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$: Stetigkeit, Richtungsableitung)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy + y^3}{x^2+y^2} & ,\ \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ,\ \text{für } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f unstetig ist.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$g(x, y) = e^{xy} - e^{x^2}\,.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{r}}$ von g an der Stelle $(x, y) = (2, 2)$ zum Richtungsvektor $\vec{r} = (-1, 1)$.

(3 + 3 = 6 Punkte)

(Summe: 41 Punkte)

A4*) (Nullstellen, Mittelwertsatz)

a) Es sei $f(x) = x^2 - e^{-2} + x\ln x$.

(i) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $I_1 = (e^{-1}, 1)$ <u>mindestens eine</u> Nullstelle hat.

(i) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $I_1 = (e^{-1}, 1)$ <u>höchstens eine</u> Nullstelle hat.

b) Es seien $x, y \in [1, 2]$ mit $x \neq y$. Finden Sie eine obere und eine untere Schranke $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ für den Term $\dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$.

<u>Hinweis</u>: Mittelwertsatz

(2+2 + 2 = 6 Punkte)