Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor | **SoSe 2012**
PD Dr. S. Kräutle | **Klausur**
Mittwoch, 03.04.2013 | **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Reihen, Grenzwerte)

a) Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$$

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt[k]{k}} + \frac{3}{\sqrt[k]{k!}}\right)^k x^k$$

c) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(1-\cos(x))}{x^2}$$

d) Über eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei bekannt, dass sie die Rekursionsgleichung

$$5\, a_{2n} = a_n + a_{n-1} + 6 + \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

erfüllt, und dass sie gegen eine Zahl $a := \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ konvergiert. Berechnen Sie aus diesen Informationen den Wert von a.

(4+4+4+2=14 Punkte)

A2) (Taylor-Entwicklung, Umkehrfunktion)

Sei

$$f(x) = e^{1-x^2} - 2\,x\,.$$

Hinweis: (Nur) Zur Kontrolle, ob Sie korrekt abgeleitet haben, wird hier verraten, dass $f'(1) = -4$, $f''(0) = -2e$.

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = 1$ das Taylor-Polynom zweiten Grades auf.

b) Begründen Sie, dass die obige Funktion f, eingeschränkt auf den Definitionsbereich

$$D_f = [0,2]\,,$$

eine Umkehrfunktion f^{-1} hat, und geben Sie den Definitionsbereich $D_{f^{-1}}$ dieser Umkehrfunktion an.

c) Stellen Sie für $f^{-1} : y \mapsto f^{-1}(y)$ das Taylor-Polynom ersten Grades zum Entwicklungspunkt $y_* = f(x_*)$ auf $(x_* = 1)$.

(6+3+3=12 Punkte)

A3) (Integration)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int_0^2 x\, e^{\frac{1}{2}x}\, dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_e^\infty \frac{1+\ln x}{x\,(\ln x)^4}\, dx$$

Bemerkung: Es ist *nicht* gestattet, Stammfunktionen ohne Rechnung z.B. einer Formelsammlung zu entnehmen.

(4+4=8 Punkte)

A4) (Stetige Fortsetzbarkeit, Differenzierbarkeit)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ c & , \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie $\lim\limits_{y \to 0} f(y^2, y)$.

(ii) Prüfen Sie, ob es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass f an der Stelle $(0,0)$ stetig ist.
Hinweis: Für (ii) ist unter anderem das Ergebnis von (i) nützlich.

b) Prüfen Sie, ob die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \; x > 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist.

Hinweis: Stellen Sie den Differenzenquotienten auf. Zur Berechnung seines Grenzwertes substituieren Sie ggf. geeignet.

(3+3=6 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)