Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor | **SoSe 2012**
PD Dr. S. Kräutle | **Klausur**
Freitag, 05.10.2012 | **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.

A1) (Folgen, Reihen, Funktionengrenzwerte)

a) Entscheiden Sie, ob die Reihen konvergent oder divergent sind:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \ln k}$$

(Begründung oder Rechnung)

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1-\frac{3}{k})^{k^2} x^k$.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^3}{2} \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, ...$$

(i) Zeigen Sie, dass $0 < a_n \le \frac{1}{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Zeigen sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist.

(iii) Hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ einen Grenzwert (Begründung)? Wenn ja, berechnen Sie diesen.

d) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e \, \cos x - e^{\cos 4x}}{\frac{1}{2} x^2}.$$

e) Hat die Folge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $\vec{a}_n = \begin{pmatrix} \cos n \\ \sin n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, eine konvergente Teilfolge? (kurze Begründung)

(4+2+5+4+1=16 Punkte)

A2) (Taylor-Entwicklung)

Sei

$$f(x) = \frac{1}{4} x^4 - 5x^2 + 10x - 5.$$

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = 2$ das Taylor-Polynom zweiten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom aus a) das Restglied an.
Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied an der Stelle $x = \frac{19}{10}$.

c) Ist die zu obigem f und x_* gehörende Taylor-Reihe punktweise konvergent auf ganz $\mathbb{R}$? (kurze Begründung)

(3+3+2=8 Punkte)

A3) (Differentiation und Integration)

a) Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \quad f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad (\text{für } x>0), \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \int_0^{3x} e^{t^2}\, dt$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 \frac{3x+7}{(x+1)\,(x+3)}\, dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_{\sqrt{2}}^{\infty} x^3\, e^{-x^4}\, dx$$

(2+2+3+2=9 Punkte)

A4) (Eigenschaften von Funktionen)

a) Sei $I = [0,2]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2\, e^{-x} - e^{-2}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall I *genau eine* Nullstelle hat.

(ii) Begründen Sie kurz (ohne Rechnung), dass f auf dem Intervall I Minimum und Maximum annimmt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,(x-y)^2\,y^2}{x^6+y^6}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

nicht stetig ist.

(5+3=8 Punkte)

(Summe: 41 Punkte)