Klausur **18.04.2011**

Mathematik für Ingenieure C-II (Inf) B-II (WIng), Bachelor

PD Dr. S. Kräutle / Dr. E. Marchand **Dauer: 90 min**

Alle Teilaufgaben erfordern eine Rechnung oder eine Begründung; das Ergebnis alleine reicht keinesfalls. Resultate aus Vorlesung/Übung können verwendet werden.

A1) (Folgen, Reihen, Grenzwerte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^k \, x^k \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{\sqrt{k}} \, x^k \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^k}{\sqrt{k}} + 7 \right) x^k$$

b) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die der Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = 2\, a_n - a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

genügt. Es sei bekannt, dass alle $a_n \neq 0$ sind.
Wir setzen $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(i) Stellen Sie durch *einmalige* Verwendung der obigen Rekursionsvorschrift eine Rekursionsvorschrift für die Folge (b_n) in der Form $b_{n+1} = f(b_n)$ auf.

(ii) Unter der Annahme, dass die Folge (b_n) konvergent ist, berechnen Sie den Grenzwert b der Folge (b_n).

c) Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n \right), \quad \text{mit } x \neq 0$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln(\ln(1+3e^x))}{\ln(1+2x)}$

(3+3+5=11 Punkte)

A2) (Taylor-Entwicklung)

Sei

$$f(x) := (2x+1)^{3/2}.$$

a) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$ das Taylor-Polynom dritter Ordnung T_3.

b) Stellen Sie für das Taylor-Polynom aus a) das Restglied R_3 auf. Geben Sie für das Restglied an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ eine Schranke "$|R_3| \leq c$" an.

(5+5=10 Punkte)

A3) (Integration)

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = x^2 \cos(x).$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$I := \int_e^\infty \frac{2\cos(\frac{1}{\ln x})\,\sin(\frac{1}{\ln x})}{x(\ln x)^2}\,dx$$

Hinweis: Starten Sie mit einer Substitution $y = \ln x$ oder $y = \frac{1}{\ln x}$.

(4+6=10 Punkte)

A4) (Eigenschaften von Funktionen)

a) Untersuchen Sie die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierten Funktionen

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}\ , \quad g(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \cos(x+y)$$

auf stetige Fortsetzbarkeit an der Stelle $(0,0)$.
Hinweis/Zur Kontrolle: Eine der beiden Funktionen ist stetig fortsetzbar, die andere nicht.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Verwenden Sie den Mittelwertsatz, um für den Term

$$\frac{x^n - y^n}{x-y}$$

wobei $x, y \in [0,1]$ und $x \neq y$ sei, eine obere Schranke c_1 und eine untere Schranke c_2 zu finden. Die Schranken sollen unabhängig von x und y sein.

(6+3=9 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)

Viel Erfolg!