Lösungsvorschlag Klausur **18.04.2011**

Mathematik für Ingenieure C-II (Inf) B-II (WIng), Bachelor

PD Dr. S. Kräutle / Dr. E. Marchand **Dauer: 90 min**

Alle Teilaufgaben erfordern eine Rechnung oder eine Begründung; das Ergebnis alleine reicht keinesfalls. Resultate aus Vorlesung/Übung können verwendet werden.

A1) (Folgen, Reihen, Grenzwerte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^k \, x^k \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{\sqrt{k}} \, x^k \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{k^k}{\sqrt{k}} + 7\Big) \, x^k$$

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die der Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = 2\, a_n - a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

genügt. Es sei bekannt, dass alle $a_n \neq 0$ sind.
Wir setzen $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(i) Stellen Sie durch *einmalige* Verwendung der obigen Rekursionsvorschrift eine Rekursionsvorschrift für die Folge (b_n) in der Form $b_{n+1} = f(b_n)$ auf.

(ii) Unter der Annahme, dass die Folge (b_n) konvergent ist, berechnen Sie den Grenzwert b der Folge (b_n).

c) Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \tfrac{1}{nx}\right)^n\right), \quad \text{mit } x \neq 0$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(1+3e^x))}{\ln(1+2x)}$

(3+3+5=11 Punkte)

Lösung.

a) (i) Mit dem Wurzelkriterium:

$$\lim_k \sqrt[k]{k^3 e^k} = \lim_k (\sqrt[k]{k})^3 \cdot e = 1^3 \cdot e = e \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{e}$$

(ii) Mit dem Wurzelkriterium:

$$\lim_k \sqrt[k]{\frac{k^k}{\sqrt{k}}} = \lim_k \frac{k}{\sqrt{\sqrt[k]{k}}} = \frac{\lim\limits_k k}{\sqrt{\lim\limits_k \sqrt[k]{k}}} = \infty \quad \Longrightarrow \quad R = 0$$

(iii) Wir verwenden (ii):

$$\sqrt[k]{\frac{k^k}{\sqrt{k}} + 7} > \sqrt[k]{\frac{k^k}{\sqrt{k}}} \overset{(ii)}{\underset{}{\xrightarrow{(k\to\infty)}}} \infty \quad \Longrightarrow \quad R = 0$$

b) (i)

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{2\,a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} = 2 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{b_n}$$

(ii) $n \to \infty$ in (i) ergibt

$$b = 2 - \frac{1}{b} \quad | \cdot b$$

$$0 = b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1$$

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n \right) = e^x \, e^{1/x} = e^{x - \frac{1}{x}}$$

(ii) Zähler und Nenner gehen jeweils gegen ∞, also kann man l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(1+3e^x))}{\ln(1+2x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{3e^x\,(1+2x)}{2\ln(1+3e^x)\,(1+3e^x)} \\
&\overset{(*)}{=} \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{3e^x}{1+3e^x}}_{=1} \lim_{x\to\infty} \frac{1+2x}{2\ln(1+3e^x)} \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2\,(1+3e^x)}{2 \cdot 3e^x} = 1
\end{aligned}$$

Dabei wurde im zweitletzten Schritt erneut l'Hospital verwendet.

Mühsamere Alternative: Wenn man bei (*) das Herausziehen des Faktors $\frac{3}{e^{-x}+3}$ *nicht* durchführt sondern stattdessen *direkt* ein weiteres mal l'Hospital anwendet, dann bekommt man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3e^x\,(3+2x)}{6e^x\,(1+\ln(1+3e^x))}$$

Hier sieht man unmittelbar, dass man den Faktor $3e^x$ kürzen kann. Auf den Rest noch ein drittes mal l'Hospital angewandt ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,(1+3e^x)}{2\cdot 3e^x}$$

was $=1$ ist.

A2) (Taylor-Entwicklung)
Sei

$$f(x) := (2x+1)^{3/2}.$$

a) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$ das Taylor-Polynom dritter Ordnung T_3.

b) Stellen Sie für das Taylor-Polynom aus a) das Restglied R_3 auf. Geben Sie für das Restglied an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ eine Schranke "$|R_3| \le c$" an.

(5+5=10 Punkte)

Lösung.

a)

$$\begin{array}{rclrcl}
f(x) &=& (2x+1)^{\frac{3}{2}}, & f(0) &=& 1\\
f'(x) &=& 3\,(2x+1)^{\frac{1}{2}}, & f'(0) &=& 3\\
f''(x) &=& 3\,(2x+1)^{-\frac{1}{2}}, & f''(0) &=& 3\\
f'''(x) &=& -3\,(2x+1)^{-\frac{3}{2}}, & f''(0) &=& -3\\
f^{(4)}(x) &=& 9\,(2x+1)^{-\frac{5}{2}}, & & &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad T_3(x) = 1 + 3x + \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^3$$

b)

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4 = \frac{9}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{(2\xi+1)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{128}\cdot\frac{1}{(2\xi+1)^{\frac{5}{2}}}$$

Dabei ist
$0<\xi<\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 1<2\xi+1<2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}<\frac{1}{2\xi+1}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{5/2}}<\frac{1}{(2\xi+1)^{5/2}}<1.$

$$\Longrightarrow \qquad |R_3| \le \frac{3}{128}\cdot 1$$

A3) (Integration)

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = x^2 \cos(x).$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$I := \int\limits_e^\infty \frac{2\cos(\frac{1}{\ln x})\ \sin(\frac{1}{\ln x})}{x(\ln x)^2}\, dx$$

<u>Hinweis</u>: Starten Sie mit einer Substitution $y = \ln x$ oder $y = \frac{1}{\ln x}$.

(4+6=10 Punkte)

Lösung.

a)

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x\, dx &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx \\
&= x^2 \sin x - 2x(-\cos x) + \int 2(-\cos x)\, dx \\
&= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x
\end{aligned}$$

b) Mit der Substitution $y := \frac{1}{\ln x}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$:

$$\begin{aligned}
I &= -\int_1^0 2\cos y \sin y\, dy = \int_0^1 2\cos y \sin y\, dy \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^1 \sin 2y\, dy = \frac{1}{2}\,(-\cos 2y)|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2
\end{aligned}$$

An der Stelle (*) kann man Verwenden: $2\sin y \cos y = \sin 2y$ (siehe Vorlesung).
Oder man substituiert $v = \sin y$. Oder man wendet partielle Integration an. Oder man 'sieht' einfach, dass die Stammfunktion von $2\sin x \cos x$ gleich $-\cos^2 x$ ist; somit $1-\cos^2 1 = \sin^2 1$ herauskommt. Achtung: $\sin^2 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2$; beide Darstellungen sind richtig (allgemein ist $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$)

Man kann die Substitution ganz oben auch auf zwei Substitutionen $u := \ln x$, $y := \frac{1}{u}$ aufteilen. Dann bekommt man den Zwischenschritt $\int_1^\infty \frac{2\cos\frac{1}{u}\sin\frac{1}{u}}{u^2}\, du$

Anmerkung: Strenggenommen handelt es sich bei I um ein *uneigentliches* Integral, d.h. noch sauberer wäre es (und in diesem Sinne ist obige Rechnung auch gemeint)

$$I = \lim_{c \to \infty} \int_e^c ...dx = ...$$

zu schreiben.

A4) (Eigenschaften von Funktionen)

a) Untersuchen Sie die auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ definierten Funktionen

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}\ , \quad g(x,y) = \cos(x+y)\,\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

auf stetige Fortsetzbarkeit an der Stelle $(0,0)$.
Hinweis: Eine der beiden Funktionen ist stetig fortsetzbar, die andere nicht.

b) Es sei $n\in\mathbb{N}$ fest vorgegeben. Verwenden Sie den Mittelwertsatz, um für den Term

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}$$

wobei $x,y\in[0,1]$ und $x\neq y$ sei, eine obere Schranke c_1 und eine untere Schranke c_2 zu finden. Die Schranken sollen unabhängig von x und y sein.

(6+3=9 Punkte)

Lösung.

a) (i)

$$\left.\begin{array}{l} f(x,0) \overset{(x\neq 0)}{=} \dfrac{0}{x^2} = 0 \overset{(x\to 0)}{\longrightarrow} 0 \\ f(x,x) \overset{(x\neq 0)}{=} \dfrac{\sin(x^2)}{2x^2} \overset{(x\to 0)}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{array}\right\} \neq$$

Da die Grenzwerte ungleich sind, ist f nicht stetig fortsetzbar. Bemerkung: Statt $f(x,0)$ kann man z.B. auch $f(x,-x)$ betrachten.

(ii) Für $(x,y)\to(0,0)$ geht x^2+y^2 und auch $x+y$ gegen null. Somit

$$g(x,y) = \underbrace{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos(x+y)}_{\to\cos(0)=1} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1$$

Da der Grenzwert existiert, ist g stetig fortsetzbar.
Anmerkung: Es ist nicht ausreichend, so wie in a) *nur zwei* verschiedene Folgen/Wege, die sich der $(0,0)$ nähern, zu betrachten, sondern es müssen *alle* möglichen Wege dieser Art betrachtet werden.

b) Der Mittelwertsatz, angewendet auf $f(x):=x^n$ liefert, da $f'(x)=n\,x^{n-1}$,

$$\frac{x^n-y^n}{x-y} = n\,\xi^{n-1},$$

wobei ξ zwischen x und y liegt. Da $x, y \in [0,1]$ angenommen wurde, ist ξ und auch ξ^{n-1} im Intervall $[0,1]$. Es folgt

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = n\,\xi^{n-1} \in [0,n],$$

also 0 ist eine untere Schranke und n eine obere Schranke.
(Es ist i.a. laut MWS auch möglich, das *offene* Intervall $(0,n)$ zu nehmen, jedoch, wenn man ganz pedantisch ist und $n=1$ ist, darf man die rechte Intervallgrenze doch nicht ausschließen. Ich denke, hinsichtlich Offenheit/Abgeschlossenheit des Intervalls sollte man *keine Punkte abziehen.* Auf wenn Grenzen angegeben werden, die von x, y abhängen, sollte man keine Punkte abziehen, sofern diese Grenzen korrekt sind, wie $n\min\{x,y\}^{n-1}$, $n\max\{x,y\}^{n-1}$.)

[Bemerkung: Hier *ohne* Mittelwertsatz auskommen zu wollen, indem man sich überlegt, für welche x, y der Ausdruck maximal bzw. minimal wird, ist nicht so leicht. Es ist *nicht* wahr, dass der Ausdruck für $x \to 1$ und $y \to 0$ maximal wird, sondern er wird für $|x-y| \to 0$ und $x, y \to 1$ maximal; der Ausdruck ist dann ein Differenzenquotient, der gegen die Ableitung von f konvergiert, und $f'(1)=n$, was zu obigem Ergebnis passt.]