Mathematik für Ingenieure C-II (Inf) B-II (WIng), Bachelor

Klausur **Dauer: 90 min**

PD Dr. S. Kräutle / Dr. E. Marchand **06.10.2010**

Alle Teilaufgaben erfordern eine Rechnung oder eine Begründung; das Ergebnis alleine reicht keinesfalls. Resultate aus Vorlesung/Übung können verwendet werden.

A1) (Folgen, Reihen, Grenzwerte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^{9n} x^n$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}\right)^{9n} x^n$$

b) Eine Folge (a_n) habe die Eigenschaft, dass

$$a_n + 2 = 7\, a_{2n}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei ferner als bekannt vorausgesetzt, dass die Folge einen Grenzwert hat. Wie lautet dann der Grenzwert?

c) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos^2(x^2) + \sin(x^5)}{x^4}$$

(5+2+3=10 Punkte)

A2) (Taylor-Entwicklung)

Sei

$$f(x) := (2+x) \int_0^x \frac{e^{1+t}}{2+t}\, dt \ , \quad x > -2.$$

a) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$ das Taylor-Polynom erster Ordnung T_1 sowie das Taylor-Polynom dritter Ordnung T_3.

b) Stellen Sie für das Taylor-Polynom T_1 aus a) das Restglied auf. Geben Sie für das Restglied an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ eine Schranke an.

c) Geben Sie für die Umkehrfunktion f^{-1} von f das Taylor-Polynom erster Ordnung $\tilde{T}_1$ zum Entwicklungspunkt $y_* = f(x_*)$ an $(x_* = 0)$.

(4+4+2=10 Punkte)

A3) (Integration)

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \sinh(2x)\sinh(3x)$$

b) Berechnen Sie die (ggf. uneigentlichen) Riemann-Integrale

$$I_1 := \int_{e^{-1}}^{e^{-1/2}} \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}, \qquad I_2 := \int_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}$$

(5+6=11 Punkte)

A4) (Eigenschaften von Funktionen)

a) Zeigen Sie, dass sich die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2+y^2}$$

an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig fortsetzen lässt.

b) Begründen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + \sin\frac{\pi x}{2}$$

auf dem Intervall $(-1,1)$ *genau eine* Nullstelle hat.

(4+3=7 Punkte)

(Summe: 38 Punkte)

Viel Erfolg!