Mathematik für Ingenieure C-II (Inf) B-II (WIng), Bachelor

Klausur **Dauer: 90 min**

PD Dr. S. Kräutle / Dr. E. Marchand **06.10.2010**

***** Lösungsvorschlag *****

A1) (Folgen, Reihen, Grenzwerte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^{9n} x^n$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}\right)^{9n} x^n$$

b) Eine Folge (a_n) habe die Eigenschaft, dass

$$a_n + 2 = 7\, a_{2n}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei ferner als bekannt vorausgesetzt, dass die Folge einen Grenzwert hat. Wie lautet dann der Grenzwert?

c) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos^2(x^2) + \sin(x^5)}{x^4}$$

(5+2+3=10 Punkte)

Lösung.

a) (i)

$$\sqrt[n]{|\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}|^{9n}} = \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)^9 \overset{(1)}{=} \left(\frac{(n^2+n)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\right)^9$$

$$\overset{(2)}{=} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)^9 \xrightarrow{(n\to\infty)} \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$\Longrightarrow \underline{\underline{R = 2^9}}(= 512)$

Dabei wurde an der Stelle (1) gemäß dritter Binomischer Formel erweitert, und bei (2) wurden die höchsten Potenzen ($= n^1$) herausgezogen und durch sie gekürzt.

(ii)

$$\sqrt[n]{|\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}|^{9n}} = (\underbrace{\underbrace{\sqrt{n^2+n}}_{\to\infty}+\underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{\to\infty}}_{\to\infty})^9 \xrightarrow{(n\to\infty)} \infty$$

$\Longrightarrow \underline{\underline{R = 0}}$

b) Sei $a := \lim_n a_n$. Dann ist $\lim_n a_{2n} = a$ (da (a_{2n}) Teilfolge von (a_n) ist). Wendet man $\lim_{n\to\infty}$ auf die gegebene Gleichung an, so bekommt man

$$a + 2 = 7a \;\Leftrightarrow\; 2 = 6a \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{a = \frac{1}{3}}}$$

c) Sowohl Zähler als auch Nenner gehen gegen null, also kann l'Hospital angewendet werden:

$$G := \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos^2(x^2)+\sin(x^5)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(x^2)\sin(x^2)\,2x+\cos(x^5)\,5x^4}{4x^3}$$

Der Bruch kann als Summe von zwei Brüchen geschrieben werden, wobei der hintere, nach Kürzen, offensichtlich gegen null geht. Den vorderen Bruch kann man ebenfalls kürzen, und dann $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ verwendet (und *nicht* weiter l'Hospital anwenden, da die Terme dann zu kompliziert würden):

$$\begin{aligned} G &= \lim_{x\to 0} \frac{8x\cos(x^2)\sin(x^2)}{4x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{5x^4\cos(x^5)}{4x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)\sin(x^2)}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{5x\cos(x^5)}{4} \\ &= \lim_{x\to 0} 2\cos(x^2) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} + 0 = 2\cdot 1 = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

<u>Varianten</u>:

(1.) Im Zähler $2-2\cos^2(x^2) = 2\sin^2(x^2)$ ausnutzen; der erste der beiden Summanden lautet dann

$$\frac{2\sin^2(x^2)}{x^4} = 2\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right)^2 \xrightarrow{(x\to 0)} 2\cdot 1^2 = 2.$$

(2.) Hinterer Term:

$$\frac{\sin(x^5)}{x^4} = x\cdot \frac{\sin(x^5)}{x^5} \xrightarrow{(x\to 0)} 0\cdot 1 = 0$$

A2) (Taylor-Entwicklung)
Sei

$$f(x) := (2+x)\int_0^x \frac{e^{1+t}}{2+t}\,dt \quad , \qquad x>-2.$$

a) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$ das Taylor-Polynom erster Ordnung T_1 sowie das Taylor-Polynom dritter Ordnung T_3.

b) Stellen Sie für das Taylor-Polynom T_1 aus a) das Restglied auf. Geben Sie für das Restglied an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ eine Schranke an.

c) Geben Sie für die Umkehrfunktion f^{-1} von f das Taylor-Polynom erster Ordnung $\tilde{T}_1$ zum Entwicklungspunkt $y_* = f(x_*)$ an $(x_* = 0)$.

(4+4+2=10 Punkte)

Lösung.

a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^x \frac{e^{1+t}}{2+t}\,dt + \underbrace{(2+x)\cdot\frac{e^{1+x}}{2+x}}_{=e^{1+x}\text{ für } x>2} \\
f''(x) &= \frac{e^{1+x}}{2+x} + e^{1+x} \\
f'''(x) &= \frac{e^{1+x}(2+x) - e^{1+x}}{(2+x)^2} + e^{1+x} = e^{1+x}\left(\frac{1+x}{(2+x)^2} + 1\right)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow f(0) = 0,\ f'(0) = e,\ f''(0) = \frac{3}{2}e,\ f'''(0) = \frac{5}{4}e$

$\Longrightarrow \underline{\underline{T_1(x) = ex}}$

und $\underline{\underline{T_3(x) = ex + \frac{3e}{4}x^2 + \frac{5e}{24}x^3}}$

b)

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = \underline{\underline{e^{1+\xi}\left(\frac{1}{2+\xi} + 1\right)\frac{x^2}{2}}}$$

wobei ξ zwischen 0 und x

$\Rightarrow R_1(1/2) = e^{1+\xi}\left(\frac{1}{2+\xi} + 1\right)\cdot\frac{1}{8}$ wobei $0 < \xi < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |R_1(1/2)| \leq e^{1+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2} + 1\right)\cdot\frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{16}e^{\frac{3}{2}}}}$

c) $y_* = f(0) = 0;\ f^{-1}(y_*) = x_* = 0,$
$(f^{-1})'(y_*) = \frac{1}{f'(x_*)} = \frac{1}{e}$ nach Formel aus Vorlesung/Übung.

Also $\underline{\underline{\tilde{T}_1(y) = \frac{1}{e}y}}$

A3) (Integration)

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \sinh(2x)\sinh(3x)$$

b) Berechnen Sie die (ggf. uneigentlichen) Riemann-Integrale

$$I_1 := \int_{e^{-1}}^{e^{-1/2}} \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}, \qquad I_2 := \int_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}$$

(5+6=11 Punkte)

Lösung.

a) Variante 1: Zweimal partiell integrieren, dann den Integranden auf die andere Seite bringen:

$$\int \sinh(2x)\sinh(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sinh 2x\;\cosh 3x - \frac{2}{3}\int \cosh 2x\cosh 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\sinh 2x\cosh 3x - \frac{2}{9}\cosh 2x\sinh 3x + \frac{4}{9}\int \sinh 2x\sinh 3x\,dx$$

$$\Rightarrow (1-\frac{4}{9})\int \sinh(2x)\sinh(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sinh 2x\cosh 3x - \frac{2}{9}\cosh 2x\sinh 3x \quad |\cdot\frac{9}{5}$$
$$\Rightarrow \int \sinh(2x)\sinh(3x)\,dx = \underline{\underline{\frac{3}{5}\sinh 2x\cosh 3x - \frac{2}{5}\cosh 2x\sinh 3x}}$$

Variante 2: Wie oben zweimal partiell integrieren, jedoch mit vertsuachten Rollen der Faktoren:

$$\int \sinh(2x)\sinh(3x)\,dx = \frac{1}{2}\cosh 2x\;\sinh 3x - \frac{3}{2}\int \cosh 2x\cosh 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cosh 2x\sinh 3x - \frac{3}{4}\sinh 2x\cosh 3x + \frac{9}{4}\int \sinh 2x\sinh 3x\,dx$$

$$\Rightarrow (1-\frac{9}{4})\int \sinh(2x)\sinh(3x)\,dx = \frac{1}{2}\cosh 2x\sinh 3x - \frac{3}{4}\sinh 2x\cosh 3x \quad |\cdot(-\frac{4}{5})$$
$$\Rightarrow \int \sinh(2x)\sinh(3x)\,dx = \underline{\underline{-\frac{2}{5}\cosh 2x\sinh 3x + \frac{3}{5}\sinh 2x\cosh 3x}}$$

Variante 3: Die Darstellung $\sinh x = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$ verwenden:

$$\int \sinh(2x)\sinh(3x)\,dx = \frac{1}{4}\int (e^{2x}-e^{-2x})\,(e^{3x}-e^{-3x})\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (e^{5x}-e^{x}-e^{-x}+e^{-5x})\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}e^{5x} - e^{x} + e^{-x} - \frac{1}{5}e^{-5x}\right]$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{20}(e^{5x}-e^{-5x}) - \frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})}} = \underline{\underline{\frac{1}{10}\sinh 5x - \frac{1}{2}\sinh x}}$$

Das ist, auch wenn's nicht so aussieht, das gleiche Ergebnis wie in Varianten 1 und 2.

b) Da beide Aufgabenteile den selben Integranden haben, rechnen wir zunächst ohne Grenzen:

$$\int \frac{1}{x\,(1+\ln x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| \quad [= \ln|1+\ln x|\,]$$

wobei $y := 1+\ln x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ substituiert wurde.

(i) $x = e^{-1} \Rightarrow y = 0$ und $x = e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y = \frac{1}{2}$.
also $I_1 = \int\limits_0^{1/2} \frac{dy}{y}$. Dieses uneigentliche Integral existiert nicht (bzw. "ist gleich unendlich") laut Vorlesung.

(ii) $x = e^{-2} \Rightarrow y = -1$ und $x = e^{-3} \rightarrow y = -2$.
also $I_2 = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dy}{y} = \ln|y|\,\Big|_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = \underline{\underline{-\ln 2}}$.

A4) (Eigenschaften von Funktionen)

a) Zeigen Sie, dass sich die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$$

an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig fortsetzen lässt.

b) Begründen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + \sin \frac{\pi x}{2}$$

auf dem Intervall $(-1,1)$ *genau eine* Nullstelle hat.

(4+3=7 Punkte)

Lösung.

a) Nimmt man eine Folge, die entlang einer der beiden Koordinatenachsen gegen $(0,0)$ geht, also z.B. $(x,0)$ mit $x \to 0$, so bekommt man

$$f(x,0) = \frac{e^0 - 1}{x^2} = 0 \quad \forall x \neq 0,$$

was gegen <u>null</u> geht. (Analoges passiert für $(0,y)$ mit $y \to 0$.)

Um einen anderen Grenzwert zu bekommen, kann man z.B. entlang einer der beiden Diagonalen gehen; z.B. (x,x) mit $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} \overset{(*)}{=} \lim x \to 0 \frac{2x\, e^{x^2}}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\, e^{x^2} = \frac{1}{2}$$

An der Stelle (*) wurde l'Hospital verwendet.

Da man *verschiedene* Grenzwerte 0 und 1/2 bekommen hat, kann f nicht stetig fortsetzbar sein.

Man könnte auch die andere Diagonale $(x,-x)$ benutzen; man kommt dann auf den Grenzwert $-1/2$.

b) Es muss (i) ein Argument geliefert werden, dass es mindestens eine Nullstelle gibt, und (ii) ein Argument, dass es höchstens eine Nullstelle gibt.

(i) Es ist

$$f(-1) = e^{-1} + \sin(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

und

$$f(+1) = e + \sin\frac{\pi}{2} = e + 1 > 0.$$

Da außerdem f <u>stetig</u> ist, folgt mit dem <u>Nullstellensatz</u> (von Bolzano), oder auch nach dem <u>Zwischenwertsatz</u>, dass f mindestens eine Nullstelle im Intervall $(-1,+1)$ hat.

(ii) Wir prüfen die Monotonie von f:
Es ist $f'(x) = \underbrace{e^x}_{>0} + \frac{\pi}{2} \underbrace{\cos\frac{\pi x}{2}}_{>0} > 0$ für $x \in (-1,+1)$. Also ist f dort streng monoton. Daraus folgt, dass es höchstens eine Nullstelle gibt.