Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Dr. Alexander Prechtel

Klausur - 23.02.2017

Mathematik für Ingenieure C1 WS16/17

Name: **Matrikelnummer:**

Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 90 Minuten. Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung. Die Gesamtpunktzahl beträgt 55 Punkte.

Aufgabe A1 Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir das euklidische Skalarprodukt.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von B.

(ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B.

(iii) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $x = (2, 0, -2)^T \in \mathbb{R}^3$ auf den Unterraum $U = \operatorname{span}\big\{(-3, 3, -3)^T, (2, 4, 2)^T\big\}$. Gilt $x \in U$?

9 + 3 + 3 = 15 Punkte

Aufgabe A2

(i) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$,

b) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{2n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

(ii) Sei V ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass durch die Relation $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in U$ eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

4 + 4 + 3 = 11 Punkte

Aufgabe A3

(i) Gegeben sei das Polynom

$$P_5(z) = z^5 + az^3 + az^2 + b$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wie müssen $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $z = i$ eine Nullstelle von P_5 ist? Geben Sie mit Begründung die reelle Faktorisierung von P_5 an.

(ii) Sei $a = -1+i \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

a) $z - a^3 = 0$,

b) $z^3 - a = 0$.

Die Lösung kann mittels Polarkoordinaten oder in der Form $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ angegeben werden.

6 + 1 + 4 = 11 Punkte

Aufgabe A4 Seien für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\beta \\ 4\alpha \\ 3\beta \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und } d = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $Ax = b$ in Abhängigkeit von α und β.

(ii) Bestimmen Sie die Determinante von A.

(iii) Sei $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine Matrix, für die die Gleichung $Bx = c$ eindeutig lösbar ist. Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $Bx = d$ eindeutig lösbar?

6 + 1 + 1 = 8 Punkte