Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 1
Prof. Dr. N. Marheineke

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

Klausur zur Mathematik für Ingenieure C1
18.02.2016

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Alle Teilaufgaben erfordern eine Rechnung oder eine Begründung. Resultate aus der Vorlesung und den Übungen dürfen verwendet werden.

A1) (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Identität gilt:

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = n\ln(n) - \ln(n!)\ .$$

Dabei bezeichnet die Funktion „ln" den natürlichen Logarithmus (vgl. Formelsammlung). Geben Sie explizit die verwendete Induktionsvoraussetzung an und kennzeichnen Sie die Stelle im Beweis, an der diese eingeht.

(8 Punkte)

A2) (Lineare Gleichungssysteme, lineare Abbildungen)
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ reelle Parameter seien.

a) Bestimmen Sie alle Werte von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, für die das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
   (i) unlösbar ist,
   (ii) genau eine Lösung besitzt,
   (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

b) Wir betrachten nun die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.
   (i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ den Rang von f.
   (ii) Für welche Werte von α ist f injektiv?
   (iii) Für welche Werte von α ist f surjektiv?

c) Bestimmen Sie für $\alpha = -4$ die orthogonale Projektion des Vektors $\boldsymbol{z} = (12, 0, 0, 0)^T$ auf Bild(f).

((2+2+2)+(2+1+1)+4=14 Punkte)

A3) (Komplexe Zahlen, Polynome)

a) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Im}(z^2(1-i)) = 2\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)\}$$

in der komplexen Zahlenebene.

b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der NEWTON-Interpolation ein Polynom P dritten Grades, das durch die folgenden Stützstellen verläuft:

x_i	-2	-1	0	1
y_i	-18	-2	0	6

Geben Sie dieses in der Form $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx^2 + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ an.

(4+4+4=12 Punkte)

A4) (Eigenwertrechnung)

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix $B \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ sei symmetrisch und habe den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 2$. Weiterhin seien die Eigenräume

$$\mathrm{Eig}(\lambda_1) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Eig}(\lambda_2) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

gegeben.
   (i) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von B, wobei $\boldsymbol{v}_1$ ein Eigenvektor zu λ_1 sein soll.
   (ii) Sei $T = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ die Matrix, die aus den Spalten $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ besteht. Wie lautet das Ergebnis des Matrixprodukts T^tBT?
   (iii) Berechnen Sie B.

(6+(3+2+3)=14 Punkte)

Viel Erfolg!