Mathematik für Ingenieure C1
Klausur: 90 Minuten
05.10.15

Prof. Dr. W. Borchers, Dr. S.F. Nemadjieu, Dipl. Math M. Gahn

- Zugelassene Hilfsmittel: Alle nicht-elektronischen Medien (Bücher, Skripte, etc.)
- Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte und die Klausur ist bestanden, wenn wenigstens 16 Punkte erreicht wurden

Aufgabe 1:

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

i) Alle Studenten sind liebenswert. Johannes ist liebenswert, daher ist er ein Student.

ii) Johannes ist ein Student und alle Studenten sind fleißig. Daher ist Johannes fleißig.

iii) Kein Student ist charmant. Johannes ist nicht charmant, daher ist er ein Student.

iv) Kein Student ist nicht charmant und Johannes ist ein Student. Daher ist er nicht charmant.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ eine Abbildung. Negieren Sie die folgenden Aussagen:

i) $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}$: $\{x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)\}$.

ii) $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, q \in \mathbb{Q}$: $0 < f(q) < \epsilon$.

(c) Man betrachte auf $\mathbb{R}$ die Relation: $x \sim y \Longleftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y)$
Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(d) Der Trikotsatz einer Handballmannschaft beinhaltet 60 langärmlige Trikots, von denen 20 blau sind. Die restlichen Trikots sind kurzärmlig und blau. Insgesamt gibt es 80 blaue Trikots (kurz- und langärmlig). Aus wie vielen Trikots besteht der Trikotsatz? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

($2 + 4 + 3 + 1 = 10$ Punkte)

Aufgabe 2:

Sei a_n und b_n für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wie folgt definiert:

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases} \quad \text{for } n \geq 1.$$

Man betrachte den Vektor $X_n := \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ und die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $X_{n+1} = AX_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Weiter betrachte man die Matrizen $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) Berechnen Sie die Inverse von P und Q, sowie die Diagonalmatrix D, die die Gleichung $A = QDP$ erfüllt.

d) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $A^n = QD^nP$.

e) Berechnen Sie D^n für $n \in \mathbb{N}$.

f) Berechnen Sie X_n.

($1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 = 10$ Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Drücken Sie $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ mit Hilfe der Additionstheoreme durch die Potenzen von $\cos(x)$ aus.

(b) Berechnen Sie im Intervall $[0, \pi]$ alle Lösungen der Gleichung

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) \quad = \quad 1.$$

(c) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$ in der Form $z = a + ib$ wobei a und b geeignete reelle Zahlen sind.

(d) Berechnen Sie in $\mathbb{C}$ alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$$

$(\,2 + 4 + 2 + 2 = 10$ Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ und $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Fortsetzung, deren Bilder bezüglich der Standardbasis wie folgt definiert sind:

$$f_m(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_m(e_2) = e_1 + me_2 + e_3, \quad f_m(e_3) = me_1 - e_2 - e_3,$$

mit einem Parameter $m \in \mathbb{R}$.

i) Geben Sie die Darstellungsmatrix M_{f_m} der linearen Abbildung f_m an.

ii) Berechnen Sie $\mathbf{Ker}\, f_m$ in Abhängigkeit von m und bestimmen Sie jeweils die Dimension von $\mathbf{Im}\, f_m$.

iii) Bestimmen Sie m so, dass f_m bijektiv ist. Berechnen Sie dafür jeweils die Inverse von M_{f_m}.

Wählen wir nun speziell $m = -1$.

iv) Berechnen Sie die Lösungsmenge der beiden Gleichungen

$$f_{-1}(x) = (1, 0, 1)^T \quad \text{und} \quad f_{-1}(x) = (0, 1, 0)^T.$$

v) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbf{Im}\, f_{-1}$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$(\,1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 2 = 10$ Punkte)

Viel Erfolg!