Mathematatik für Ingenieure C1 (WS 14/15)

Klausur: 90 Minuten

12.02.15

(Prof. Dr. W. Borchers, Dr. S. Nemadjieu, M. Gahn)

- Zugelassene Hilfsmittel: Alle nicht-elektronischen Medien (Bücher, Skripte, etc.)
- Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte und die Klausur ist bestanden, wenn wenigstens 16 Punkte erreicht wurden

---

Aufgabe 1:

a) Der Operator „nor“ sei wie folgt definiert

$$A \operatorname{nor} B := \neg(A \vee B).$$

(i) Erstellen Sie eine Wahrheitstafel für den Operator „nor“.

(ii) Zeigen Sie, dass die Operatoren „$\neg$“, „$\vee$“ und „$\wedge$“ mit Hilfe von „nor“ definiert werden können und drücken Sie die drei Operatoren durch „nor“ aus.

(iii) Ist der Operator „nor“ assoziativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iv) Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$(\neg A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (((A \operatorname{nor} A) \operatorname{nor} B) \operatorname{nor} ((A \operatorname{nor} A) \operatorname{nor} B))$$

b) Gegeben sei die periodische Zahl $x = 0,1\overline{234}$. Berechnen Sie $n, m \in \mathbb{N}$, so dass $x = \frac{n}{m}$.

($1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 10$ Punkte)

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen und geben Sie die Lösung in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an (a und b müssen explizite Zahlen sein, d.h. sie dürfen <u>nicht</u> mittels trigonometrischen Funktionen dargestellt werden):

(i) $(z + 2i)^4 = -64$,

(ii) $z^3 - 7z^2 + 25z - 39 = 0$.

b) Bestimmen Sie für die folgende Gleichung alle Lösungen $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x + 2yi - \overline{3xi - y} = 5 + 8i$$

($4 + 4 + 2 = 10$ Punkte)

Aufgabe 3:

Die Matrix $A_\beta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei für $\beta \in \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3\beta & 1 & -3 \\ \beta & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 4$, also insbesondere unabhängig von β.

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume in Abhängigkeit von β.

b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_β invertierbar? Berechnen Sie, falls existent, die Matrix A_8^{-1}, sowie die Lösungsmenge der Gleichung

$$A_8 \vec{x} = (0, 8, -8)^T.$$

($6 + 4 = 10$ Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 4:

Für $x \in \mathbb{R}$ sei die $(n \times n)$-Matrix $A_n(x)$ wie folgt definiert:

$$(A_n(x))_{ij} = \begin{cases} x \text{ für } i = j \\ 1 \text{ für } i = 1,\ j > 1 \\ 1 \text{ für } j = 1,\ i > 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}, \text{ d.h. } A_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\det(A_n(x)) = x \det(A_{n-1}(x)) - x^{n-2}$ für $n \geq 3$ ist.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion und Aufgabe a), dass

$$\det(A_n(x)) = x^{n-2}(x^2 - (n-1))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von b) die Eigenwerte von $A_n(0)$.

<u>*Hinweis:*</u> *Die Zwischenresultate in den einzelnen Aufgabenstellungen dürfen in den darauffolgenden Teilaufgaben verwendet werden.*

($3 + 4 + 3 = 10$ Punkte)