Mathematik für Ingenieure C1, Bachelor

Prof. Dr. S. Kräutle **Klausur**

Dienstag, 23.09.2014 **Dauer: 90 min**

A1) (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie:

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{n-1}{4\,(n+3)}$$

(5 Punkte)

A2) (Komplexe Zahlen)

Bemerkung zu A2: Wo Sie es für sinnvoll erachten, können Sie mit Polarkoordinaten rechnen oder mit *Skizzen* arbeiten. Alle *Endergebnisse* sollen jedoch *ohne* Verwendung von Exponential- und Winkelfunktionen dargestellt werden.

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil:

(i) $z = \dfrac{1+i}{2+3\,i}$, (ii) $z = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i)\right]^4$, (iii) $z = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i)\right]^{79}$

b) Berechnen Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\mathrm{Re}(iz) + i\,\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(iz) + i\,\mathrm{Im}(z) = \overline{z} + 1\,.$$

c) Berechnen Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z+1)^4 = 16\,.$$

(8+4+3=15 Punkte)

A3) (Matrizen, Lineare Abbildungen, Lineare Gleichungssysteme)

a) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die Lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

(ii) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? (Kurze Begründung)

b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ die (von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige) Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$M\,\vec{x} = \vec{b}\,.$$

(i) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besteht L aus genau einem Element?

(ii) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $L = \emptyset$?

(iii) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besteht L aus unendlich vielen Elementen?

c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Auf $\mathbb{R}^n$ sei die Relation $\sim$ definiert durch

$$\vec{x} \sim \vec{y} \;:\Longleftrightarrow\; \vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Kern}(A)\,.$$

Prüfen Sie, ob die Relation transitiv ist.

d) Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, und es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv. Es sei bekannt, dass die Vektoren $\vec{x}$ und $f(\vec{x}) + \vec{y}$ linear unabhängig sind. Zeigen/Begründen Sie, dass dann $f^{-1}(\vec{x})$ und $\vec{x} + f^{-1}(\vec{y})$ linear unabhängig sind.

(6 + 5 + 2 + 2 = 15 Punkte)

A4) (Eigenwerte, Eigenräume)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum.

c) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$? (kurze Begründung)

(2+4+1=7 Punkte)

(Summe: 42 Punkte)