Mathematik für Ingenieure C1, Bachelor

Dr. habil. S. Kräutle **Klausur**

Donnerstag, 20.02.2014 **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung; es sei denn, die Aufgabenstellung besagt ausdrücklich, dass das nicht erforderlich ist.

A1) (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie:

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

(5 Punkte)

A2) (Komplexe Zahlen)

Bemerkung zu A2: Wo Sie es für sinnvoll erachten, können Sie mit Polarkoordinaten rechnen. Alle *Endergebnisse* sollen jedoch *ohne* Verwendung von Exponential- und Winkelfunktionen dargestellt werden.

a) Berechnen Sie: (i) $z = \dfrac{5}{4+3\,i}$, (ii) $z = (1-i)^6$

b) Berechnen Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z-1+i)^2 = -9\,.$$

c) Berechnen Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{C}$ der Gleichung

$$2z\,\mathrm{Re}(z) + 2\,\overline{z}\,\mathrm{Im}(z) = z^2 + 1\,.$$

(2+3 + 3 + 4 = 12 Punkte)

A3) (Determinanten, Matrizen, Lin. Abb., Lin. Unabhängigkeit)

a) Sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(M), \det(2M), \det(M^{-1})$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ die Lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

(ii) Ist f
(α) injektiv, (β) surjektiv?
(kurze Begründung)

(iii) Finden Sie ein $\vec{x}_2 \in \mathbb{R}^5$ mit der Eigenschaft $A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2$ und $\vec{x}_2 \neq \vec{x}_1$, wobei $\vec{x}_1 = (1,1,1,1,1)^T$.
Hinweis: *Eine mögliche* Herangehensweise:
Was wissen Sie über $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 =: \vec{v}$?

c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\vec{u}, \vec{v} \in V$ seien linear unabhängig. Es sei $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ und $\vec{y} = \vec{u} - \vec{v}$. Zeigen Sie, dass dann $\vec{x}, \vec{y}$ linear unabhängig sind.

(4 + 4+2+3 + 2 = 15 Punkte)

A4) (Eigenwerte, Eigenräume)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A (auch die komplexen).
Hinweis/Kontrollmöglichkeit: Es gibt einen reellen Eigenwert λ_1 und zwei nicht-reelle Eigenwerte λ_2, λ_3.

b) Bestimmen Sie für den reellen Eigenwert λ_1 aus a) den Eigenraum.

c) Welche Dimension haben die Eigenräume von λ_2 und λ_3?
(Angabe der Dimensionen *ohne* Angabe einer Begründung/Rechnung soll hier ausreichen.)

d) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ (kurze Begründung)?
Im Falle der Diagonalisierbarkeit geben Sie eine Diagonalmatrix $L \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an, zu der A ähnlich ist.

(3+4+1+2=10 Punkte)

(Summe: 42 Punkte)