Mathematik für Ingenieure I, Bachelor

Dr. habil. S. Kräutle **Klausur**

Dienstag, 02.10.2012 **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung; es sei denn, die Aufgabenstellung besagt ausdrücklich, dass das nicht erforderlich ist.

A1) (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\,(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

(5 Punkte)

A2) (Komplexe Zahlen)

Alle <u>Ergebnisse</u> sollen <u>ohne</u> Verwendung von Exponential- und Winkelfunktionen dargestellt werden.

a) Berechnen Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die

$$z^2 - \bar{z}^2 = 2\,i\,|z|^2$$

gilt, und skizzieren Sie die Lösungsmenge.

b) Berechnen Sie $(\sqrt{3}+i)^{11}$.

c) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z^2 - i)^2 = -4\,.$$

(3+5+4=12 Punkte)

A3) (Lineare Gleichungssysteme, Unterräume, Abbildungen)

a) Berechnen sie die Lösungsmenge L des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ \mu \\ 3 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von den Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) Seien $U_1 = \operatorname{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$, $U_2 = \operatorname{span}\{\vec{w}, \vec{x}\}$, wobei

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Raumes $U_1 \cap U_2$ sowie des Raumes $U_1 + U_2$.

c) Es seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ wie in Aufgabenteil b). Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T \mapsto \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} + \delta\vec{x}$$

(i) injektiv? (ii) surjektiv? (Begründung!)

d) Seien V_1 und V_2 *echte* Unterräume des $\mathbb{R}^6$, also $V_1 \subsetneqq \mathbb{R}^6$, $V_2 \subsetneqq \mathbb{R}^6$.
Es sei $\dim(V_1 \cap V_2) = 4$ und $\dim(V_1 + V_2) = 6$.
Ist es wahr, dass dann immer $\dim(V_1) = \dim(V_2)$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(5+5+2+2=14 Punkte)

A4) (Eigenwerte, Eigenräume)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie alle Eigenräume von A.

c) Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix X an, so dass $A = XDX^{-1}$.
(Bei Aufgabenteil c) ist keine Rechnung/Begründung nötig.)

(2+3+2=7 Punkte)

(Summe: 38 Punkte)