Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung; es sei denn, die Aufgabenstellung besagt ausdrücklich, dass das nicht erforderlich ist.

A1) (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=-n}^{n} k\, 2^k = (n-1)\, 2^{n+1} + \frac{n+2}{2^n}$$

(9 Punkte)

A2) (Komplexe Zahlen)

a) Berechnen Sie die Zahl $z = \dfrac{10+5\,i}{2-i}$
(d.h. finden Sie Real- und Imaginärteil).

b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung

$$\mathrm{Re}(z^2) + 10\,(\mathrm{Re}(z))^2 = |2z + \bar{z}|^2$$

erfüllen, und *skizzieren* Sie die Lösungsmenge.

c) *Skizzieren* Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\}$
(Angabe der Skizze alleine reicht).

d) Geben Sie alle $z \in \mathbb{C}$ an mit $z^2 = (1+i)^2$
Anmerkung zu (d): Angabe des Rechenweges hier nicht zwingend. Die Lösung(en) soll(en) ohne Verwendung von Winkelfunktionen angegeben werden.

e) Berechnen Sie $z = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{42}$

(2+5+1+2+2=12 Punkte)

A3) (Matrizen, Determinanten, Abbildungen)

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Determinante von A.

(ii) Berechnen Sie die Inverse von A.

b) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^3 = E_n$. Begründen Sie, dass dann B invertierbar ist.

c) Ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \longmapsto \det(\alpha A)$, wobei A aus a) ist,
(i) linear?
(ii) surjektiv?
Geben Sie eine kurze Begründung/Erläuterung Ihrer Antwort.

d) Durch $M_1 \sim M_2 :\Longleftrightarrow \det(M_1) = \det(M_2)$ ist (offensichtlich) eine Relation auf der Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert.
Ist diese Relation (i) reflexiv, (ii) symmetrisch, (iii) transitiv?
(ohne Begründungen/Rechnungen)

(4+1+2+1=8 Punkte)

A4) (Matrizen, Bild und Kern)

a) Sei $k \in \mathbb{R}$ ein Parameter und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{R}$ eine Basis von Bild(A).

b) Gibt es eine 4×5-Matrix M mit der Eigenschaft $\dim(\text{Bild}(M)) = \dim(\text{Kern}(M))$? (Falls ja, geben Sie ein Beispiel. Falls nein, begründen Sie die Nichtexistenz.)

c) Sei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Kann man jeden beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ schreiben? (Begründung und Rechnung erforderlich)

(3+1+3=7 Punkte)

A5) (Eigenwerte, Eigenräume)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle (reellen) Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie alle (reellen) Eigenräume von A.

c) (i) Ist A diagonalisierbar? (Begründung!)
(ii) Falls ja: Geben Sie eine Diagonalmatrix an, zu der A ähnlich ist.
(Bei (ii) ist keine Rechnung/Begründung nötig.)

(3+3+2=8 Punkte)

(Summe: 44 Punkte)