Mathematik für Ingenieure B-I/C-I/D-I, Bachelor **SoSe 2011**
PD Dr. S. Kräutle, Prof. Dr. F. Radu **Klausur**
Samstag, 08.10.2011 **Dauer: 90 min**

Alle Teilaufgaben — außer A1-b —erfordern entweder eine Rechnung oder eine kurze Begründung.

A1) (Vollständige Induktion, Kombinatorik)

a) Zeigen Sie mit oder ohne Vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (k!)^2(k^2+2k) = ((n+1)!)^2 - 1$$

b) Hinweise zu (b): Sie können Rechenausdrücke wie Fakultäten, Potenzen, etc., die eventuell in Ihrem Ergebnis vorkommen, stehen lassen, ohne sie auszumultiplizieren. Sie brauchen Ihr Ergebnis nicht zu begründen.

(i) Es soll ein Fußball-Team gebildet werden, das aus 5 Informatikern, 5 Ingenieuren und 1 Mathematiker bestehen soll. Zur Verfügung stehen 100 Informatiker, 200 Ingenieure und 4 Mathematiker. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

(ii) Aus der Menge von 100 Informatikern, 200 Ingenieuren und 4 Mathematikern sollen nun *zwei* Teams gebildet werden, ein *Team A* und ein *Team B*, die gegeneinander spielen sollen, und die jeweils aus 5 Informatikern, 5 Ingenieuren und 1 Mathematiker bestehen sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

(6+2+2=10 Punkte)

A2) (Komplexe Zahlen)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

a) $|z+i| = |z+1|$

b) $z^5 = 1-i\sqrt{3}$
Hinweis: Geben Sie die Lösung(en) in Polarkoordinaten an; es ist *nicht* nötig das Ergebnis mit Wurzeln darzustellen.

c) $z^n = |z|$, wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
Hinweis: Wenden Sie '$|\cdot|$' und 'arg' auf die Gleichung an.

(3+4+3=10 Punkte)

A3) (Matrizen, Determinanten, etc.)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis vom Kern sowie eine Basis vom Bild von A.

b) Ist die zu A gehörende lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
(i) injektiv, (ii) surjektiv?
(iii) Hat das Lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für jedes beliebige $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ jeweils genau eine Lösung?

c) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die letzte Spalte wegstreicht. Warum ist B invertierbar?

d) Bestimmen Sie

$$\det(B^{-1}(B^3)^T B^{-1}).$$

(Dabei ist 'T' das Transponiert-Zeichen.)

(5+3+1+2=11 Punkte)

A4) (Eigenwerte)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A, sowie die Determinante und die Spur von A.

b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass sowohl $\lambda_1 = 1$ als auch $\lambda_2 = -1$ Eigenwerte von A sind.

(5+4=9 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)