Mathematik für Ingenieure C-I (Inf) B-I (WIng), Bachelor

PD Dr. S. Kräutle / Dr. E. Marchand **Klausur**

11.10.2010 **Dauer: 90 min**

Alle Teilaufgaben – mit Ausnahme von A2-d und A3-b – erfordern entweder eine Rechnung oder eine kurze Begründung.

A1) (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie mittels Vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k \cdot k! = (2n)! - 1$$

(8 Punkte)

A2) (Komplexe Zahlen)

a) Bestimmen Sie die Menge

$$M = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(2z+i) \cdot \operatorname{Re}(z-2i) > \operatorname{Im}(z^2+z) \},$$

und skizzieren Sie die Menge.

b) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z^3 - 4i)^2 + 16 = 0.$$

Hinweise: Substitution. – Sie können sich aussuchen, ob Sie die Lösungen in Polarkoordinaten oder in Real- und Imaginärteil angeben.

c) Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+1-2i| > 2 \}.$$

d) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv und/oder surjektiv sind:

(i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto e^{ix}$

(ii) $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad z \longmapsto |z| \qquad (\mathbb{R}_0^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \})$

(iii) $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \overline{z}$

(iv) $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto iz$

Hinweis: Hier reicht es, wenn Sie (*ohne* Rechnung, *ohne* Begründung) das Ergebnis angeben.

Hinweis zur Bewertung: Jede richtige Antwort ergibt einen halben Punkt. Jede falsche Antwort ergibt einen halben negativen Punkt; jedoch wird keine negative Punktzahl aus A2-d auf das Gesamtergebnis übertragen.

(3+6+2+4=15 Punkte)

A3) (Lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Lineare Unabhängigkeit)
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\beta+2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems
$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

b) Geben Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die *Dimension* vom Kern und vom Bild von A an. (Angabe des Ergebnisses reicht.)

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von A linear unabhängig?
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Zeilen von A linear unabhängig?

(8+2+2=12 Punkte)

A4) (Eigenwerte, Eigenräume)

a) Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.
Hinweis: Sie können verwenden: Einer der Eigenwerte ist 4.

(ii) Berechnen Sie alle zugehörigen Eigenräume.

b) Es sei $M = XLX^{-1}$ mit
$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Geben Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix M an.

(ii) Berechnen Sie M.

(10+5=15 Punkte)

(Summe: 50 Punkte)

Viel Erfolg!