Mathematik für Ingenieure C-I (Inf) B-I (WIng), Bachelor — **WS 09/10**

PD Dr. S. Kräutle — **Klausur**

Mittwoch, 07.04.2010 — **Dauer: 90 min**

Alle Teilaufgaben erfordern entweder eine Rechnung oder eine kurze Begründung.

A1) (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie mittels Vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k\,2^{n-k} \;=\; 2^{n+1} - (n+2)$$

(8 Punkte)

A2) (Komplexe Zahlen)

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{25i}{(2+i)^2}, \qquad z_2 = (1+i)^{12}$$

b) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{C}$:

(i) $\mathrm{Re}(z^2) + i = i\,\mathrm{Im}(z)\;^2 + (1+i)\,z\,\overline{z}$

(ii) $z^3 = -\dfrac{i}{27}$

Hinweis zu b): Sie können sich aussuchen, ob Sie die Ergebnisse mittels Polarkoordinaten oder mittels Real- und Imaginärteil darstellen.

(5+7=12 Punkte)

A3) (Matrizen, Lineare Gleichungssysteme, Abbildungen)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis vom Kern sowie eine Basis vom Bild von A.

b) Ist das Lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ im Fall $\alpha = 0$ lösbar

(i) für $\vec{b} = (0, 4, 0)^T$,

(ii) für $\vec{b} = (1, 1, 1)^T$?

c) (i) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Zeilen von A linear unabhängig?

(ii) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von A linear unabhängig?

d) Ist die Abbildung

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \longmapsto (x, 2, 1)^T$$

linear, injektiv, surjektiv?

(8+2+2+3=15 Punkte)

A4) (Eigenwerte/-räume, Determinante)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Berechnen Sie alle zugehörigen Eigenräume.

c) Sei

$$B := A \cdot (A + 3\,E_3),$$

wobei E_3 die 3×3-Einheitsmatrix ist.
Bestimmen Sie $\det(B)$ sowie alle Eigenwerte von B.

(5+6+4=15 Punkte)

(Summe: 50 Punkte)

Viel Erfolg!