Mathematik für Ingenieure C-I (Inf) B-I (WIng), Bachelor **WS 09/10**

PD Dr. S. Kräutle **Lösungsvorschlag Klausur**

Mittwoch, 07.04.2010 **Dauer: 90 min**

Alle Teilaufgaben erfordern entweder eine Rechnung oder eine kurze Begründung.

A1) (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie mittels Vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k\, 2^{n-k} \;=\; 2^{n+1} - (n+2)$$

(8 Punkte)

Lösung.

Induktionsanfang $(n=0)$: $0 \overset{!}{=} 2^1 - 2$ stimmt

Induktionsschritt $(n \to n+1)$: Es gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, 2^{n-k} \;=\; 2^{n+1} - (n+2)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Zu zeigen: $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k\, 2^{n+1-k} \;=\; 2^{n+2} - (n+3)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k\, 2^{n+1-k} \;&=\; 2 \sum_{k=0}^{n+1} k\, 2^{n-k} = 2 \left(\sum_{k=0}^{n} k\, 2^{n-k} \;+ (n+1)\, 2^{n-(n+1)} \right) \\ &\overset{\text{(I.V.)}}{=} 2\left[2^{n+1} - (n+2)\right] + n+1 = 2^{n+2} - (n+3)\end{aligned}$$

Oder, wenn man die Reihenfolge der beiden ersten Schritte vertauscht,

$\sum\limits_{k=0}^{n+1} k\, 2^{n+1-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} k\, 2^{n+1-k} + (n+1)\, 2^{(n+1)-(n+1)} = 2 \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\, 2^{n-k} \;+ (n+1)\, 2^{n-(n+1)} \right) \overset{\text{(I.V.)}}{=} \ldots$

A2) (Komplexe Zahlen)

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{25i}{(2+i)^2}, \qquad z_2 = (1+i)^{12}$$

b) Bestimmen sie jeweils die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{C}$:

(i) $\mathrm{Re}(z^2) + i = i\,\mathrm{Im}(z)\ ^2 + (1+i)\,z\,\overline{z}$

(ii) $z^3 = -\dfrac{i}{27}$

Hinweis zu b): Sie können sich aussuchen, ob Sie die Ergebnisse mittels Polarkoordinaten oder mittels Real- und Imaginärteil darstellen.

(5+7=12 Punkte)

Lösung.

a)

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{25i}{(2+i)^2} = \frac{25i}{4-1+4i} = \frac{25i\,(3-4i)}{(3+4i)\,(3-4i)} = \frac{25i\,(3-4i)}{9+16} \\ &= i\,(3-4i) = 4+3i \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(z_1) = 4,\ \mathrm{Im}(z_1) = 3$

In Polarkoordinaten rechnen:

$|1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = 2\pi \cdot \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = (\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64 \text{ und} \\ \arg(z_2) = 12 \cdot \arg(1+i) = \frac{12}{8} \cdot 2\pi = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow z_2 = -64$$

Oder:

$$z_2 = ((1+i)^2)^6 = (2i)^6 = 2^6 i^6 = 64 \cdot (-1)^3 = -64$$

b) (i) Ansatz $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, also $z^2 = (a^2-b^2) + 2abi$:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Re}(z^2) + i = i\,\mathrm{Im}(z)\ ^2 + (1+i)\,z\,\overline{z} \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - b^2 + i = ib^2 + (1+i)\,(a^2+b^2) \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \quad \wedge \quad 1 = b^2 + a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & b = 0 \quad \wedge \quad 1 = a^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a = \pm 1 \quad \wedge \quad b = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad L = \{\pm 1\}$

(ii) Polarkoordinaten:

$|-\frac{i}{27}| = \frac{1}{27}$ und $\arg(-\frac{i}{27}) = \frac{3}{4} \cdot 2\pi$

$\Rightarrow$ es gibt 3 Lösungen $z_{1,2,3}$ mit $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ und

$\arg(z_1) = \frac{1}{4} \cdot 2\pi$

$\arg(z_2) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{3}) \cdot 2\pi = \frac{7}{12} \cdot 2\pi$

$\arg(z_3) = (\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) \cdot 2\pi = \frac{11}{12} \cdot 2\pi$

Also die Lösungen in Polarkoordinaten:

$z_1 = \frac{1}{3}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}\,i$

$z_2 = \frac{1}{3}\,(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

$z_3 = \frac{1}{3}\,(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$

Das kann man noch umrechnen (mittels Skizze, mit gleichseitigen Dreiecken):

$z_1 = \frac{1}{3}\,i$

$z_2 = \frac{1}{3}\,(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i) = -\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{6}i$

$z_3 = \frac{1}{3}\,(+\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i) = +\frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{6}i$

A3) (Matrizen, Lineare Gleichungssysteme, Abbildungen)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis vom Kern sowie eine Basis vom Bild von A.

b) Ist das Lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ im Fall $\alpha = 0$ lösbar

(i) für $\vec{b} = (0, 4, 0)^T$,

(ii) für $\vec{b} = (1, 1, 1)^T$?

c) (i) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Zeilen von A linear unabhängig?

(ii) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von A linear unabhängig?

d) Ist die Abbildung

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \longmapsto (x, 2, 1)^T$$

linear, injektiv, surjektiv?

(8+2+2+3=15 Punkte)

Lösung.

a) Gauß-Elimination; dabei zuerst die Zeile mit dem Parameter nach unten tauschen, um Fallunterscheidung hinauszuzögern, gleichzeitig die Zeile, die nicht mit null anfängt, nach oben tauschen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

<u>Im Fall $\alpha = 0$:</u>
Matrix z.B. weiter umformen auf Gauß-Jordan-Form:

$$\to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Daran liest man ab:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$ ist eine Basis vom Kern und

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis vom Bild.}$$

<u>Im Fall $\alpha \neq 0$:</u>
Matrix z.B. weiter umformen auf Gauß-Jordan-Form:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Daran liest man ab:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis vom Kern und}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis vom Bild.}$$

b) (i) Es ist $\vec{b} = 4 \cdot (0,1,0)^T$, und $(0,1,0)^T$ ist nach a) offensichtlich im Bild von A. Somit ist auch $\vec{b}$ im Bild von A (Bild ist immer ein Vektorraum). Also ist das LGS lösbar.

(ii) Nach a) haben alle Vektoren, die im Bild von A liegen, als erste Komponente den Wert null. Ein Vektor $\vec{b} = (1,1,1)^T$ ist daher nicht im Bild, und somit hat das LGS keine Lösung.

Bemerkung: Alternativ kann man natürlich auch ein neues Gauß-Verfahren starten für das erweitere Schema $(A|\vec{b})$, was aber deutlich aufwändiger ist.

c) Nach a) ist der Rang (=Dimension des Bildes)

$$\text{Rang}(A) = \begin{cases} 2, & \alpha = 0 \\ 3, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

(i) Die 3 Zeilen sind l.u., genau dann wenn der Rang 3 ist, was also genau dann der Fall ist, wenn $\alpha \neq 0$.
Alternativ auch so argumentieren: Die Spalten sind genau dann l.u., wenn die Stufenform in a) in jeder Spalte eine Stufe hat. Das kann nie der Fall sein, da es in a) nie mehr als 3 Stufen aber 4 Spalten

gibt.

(ii) Die 4 Spalten sind l.u., genau dann wenn der Rang 4 ist, was also für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ der Fall ist.
Oder, noch kürzer: 4 Spalten/Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer l.a.

d) Es ist $g(0) = (0, 2, 1)^T \neq \vec{0}$. Daraus folgt, dass g nicht linear ist.
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = g(y)$, also $(x, 2, 1)^T = (y, 2, 1)^T \Rightarrow x = y$.
Also ist g injektiv.
g ist nicht surjektiv, denn z.B. für $(0, 0, 0)$ gibt es offensichtlich kein Urbild.

A4) (Eigenwerte/-räume, Determinante)
Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Berechnen Sie alle zugehörigen Eigenräume.

c) Sei
$$B := A \cdot (A + 3\,E_3),$$
wobei E_3 die 3×3-Einheitsmatrix ist.
Bestimmen Sie $\det(B)$ sowie alle Eigenwerte von B.

(5+6+4=15 Punkte)

Lösung.

a) Z.B. mit der Sarrus-Regel berechnen wir die Determinante:
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2\,(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\,[(1-\lambda)(1+\lambda) - 2] \\ &= (1-\lambda)\,[\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2] \\ &= \lambda\,(1-\lambda)\,(\lambda-3) \end{aligned}$$

Die Matrix hat also die 3 Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

b) Eig(0):
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(0) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Eig(1):
$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(1) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Eig(3):

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(3) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

c) Berechnung der Determinante geht hier am einfachsten mit dem Determinantenproduktsatz und mit dem Wissen, dass die Determinante von A gleich null ist (denn $\det(A)$ ist das Produkt der Eigenwerte von A, bzw: $\det(A){=}0 \Leftrightarrow A$ hat EW null):

$$\det(B) = \underbrace{\det(A)}_{=0} \cdot \det(A{+}3E_3) = 0$$

Berechnung der Eigenwerte von B (Vorgehensweise aus Aufgabe P36):
B ist ein polynomieller Ausdruck in A:

$$B = A^2 + 3A$$

Die Eigenwerte von B ergeben sich daher aus den Eigenwerten von A als $\mu_i = \lambda_i^2 + 3\lambda_i$, $i{=}1,2,3$, also

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1^2{+}3\cdot 1 = 4, \quad \mu_3 = 3^2{+}3^2 = 18.$$

Alternativ kann man natürlich auch Matrix B explizit aufstellen und Determinante und Eigenwerte berechnen, was aber deutlich aufwändiger ist. Es ist $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Dass $\det(B){=}0$ ist, sieht man daran, dass die mittlere Zeile die Summe aus den beiden anderen Zeilen ist ($\to$Zeilen l.a.). Es ist $p_B(\lambda) = (5{-}\lambda)^2(12{-}\lambda) + 72 - (12{-}\lambda) - 72(5{-}\lambda) = -\lambda^3{+}22\lambda^2{-}72\lambda = -\lambda\,(\lambda^2{-}22\lambda{+}72) = -\lambda\,(\lambda{-}4)(\lambda{-}18)$.

(Summe: 50 Punkte)