Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 1
Dr. A. Prechtel

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

Mathematik für Ingenieure C1
3. Testat, 10.02.2017

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:
Unterschrift:

Falsch gesetzte Kreuze führen zu Punktabzug. Jeder Aufgabenblock A1) bis A5) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

A1) Gegeben seien die Vektoren

$$\{v_1, v_2, v_3\} := \left\{(-1,0,1)^T, (0,1,0)^T, (1,0,0)^T\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachten wir das euklidische Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Die Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3$ bilden ein Orthogonalsystem in $\mathbb{R}^3$.

W F Sei $U := \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. Dann gilt für die orthogonale Projektion P_U auf U:

$$P_U(x) = \sum_{i=1}^{2} \langle v_i, x\rangle v_i \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3.$$

W F Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle x, x\rangle > 0$.

(3 Punkte)

A2) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit der Vorschrift $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F $\dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = 2$

W F Das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ lösbar.

b) Wie lautet der Rang von A?

Rang $A =$

c) Bestimmen Sie eine Basis vom Kern von f.

(2+1+1=4 Punkte)

A3) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebige quadratische Matrizen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W | F $AB = BA$.

W | F $(AB)^T = B^T A^T$.

W | F $(A+B)^T = B^T + A^T$.

(3 Punkte)

A4)

a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W | F A besitzt den Eigenraum Kern(A).

W | F Der Vektor $(1,2)^T$ ist ein Eigenvektor von A.

W | F Für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist das Produkt aller Eigenwerte von B nicht notwendig reell.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die jeweiligen Eigenräume von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 +2 = 5 Punkte)

A5)

a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebige quadratische Matrizen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W | F $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

W | F $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

W | F $\det(A^T A) = \det(A)^2$.

b) Gegeben sei $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\det(C)$.

$\det(C) =$

(3+1=4 Punkte)

A1	A2	A3	A4	A5	Σ

Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 1
Dr. A. Prechtel

Mathematik für Ingenieure C1
3. Testat, 10.02.2017

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Studienrichtung:

Unterschrift:

Falsch gesetzte Kreuze führen zu Punktabzug. Jeder Aufgabenblock A1) bis A5) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

A1) Gegeben seien die Vektoren

$$\{v_1, v_2, v_3\} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T, (0,1,0)^T, (1,0,0)^T \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachten wir das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Die Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

W F Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle \alpha x, y \rangle + \langle \beta x, z \rangle = \langle (\alpha + \beta) x, y + z \rangle.$$

W F Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und P_U die orthogonale Projektion auf U. Dann gilt $x - P_U(x) \in U$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(3 Punkte)

A 2) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit der Vorschrift $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F $\dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = 3$

W F Das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ lösbar.

b) Wie lautet der Rang von A?

Rang $A =$

c) Bestimmen Sie eine Basis vom Bild von f.

(2+1+1=4 Punkte)

A3) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebige quadratische Matrizen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $AB = BA$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $(AB)^T = A^T B^T$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $(A + B)^T = B^T + A^T$.

(3 Punkte)

A4)

a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Kern(A) ist kein Eigenraum von A.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\lambda = 5$ ist kein Eigenwert von A.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Summe aller Eigenwerte von B reell.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die jeweiligen Eigenräume von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 +2 = 5 Punkte)

A5)

a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebige quadratische Matrizen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(A^T BA) = \det(A)^2 \det(B)$.

b) Gegeben sei $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\det(C)$.

$\det(C) =$

(3+1=4 Punkte)

A1	A2	A3	A4	A5	Σ

Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 1
Dr. A. Prechtel

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

Mathematik für Ingenieure C1
3. Testat, 10.02.2017

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:
Unterschrift:

Falsch gesetzte Kreuze führen zu Punktabzug. Jeder Aufgabenblock A1) bis A5) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

A1) Gegeben seien die Vektoren

$$\{v_1, v_2, v_3\} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T, (0,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachten wir das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Die Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

W F Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beliebig. Dann gilt $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

W F Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ ein Unterraum und P_U die orthogonale Projektion auf U. Dann gilt

$$\langle x - P_U(x), y \rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^3.$$

(3 Punkte)

A 2) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit der Vorschrift $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F $\dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Kern} f = 2$

W F Das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ lösbar.

b) Wie lautet der Rang von A?

Rang $A =$

c) Bestimmen Sie eine Basis vom Kern von f.

(2+1+1=4 Punkte)

A3) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebige quadratische Matrizen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $AB = BA$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $(AB)^T = A^T B^T$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $(A + B)^T = B^T + A^T$.

(3 Punkte)

A4)

a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ A besitzt den Eigenraum Kern(A).

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\lambda = 5$ ist ein Eigenwert von A.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Summe aller Eigenwerte von B nicht notwendig reell.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die jeweiligen Eigenräume von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 + 2 = 5 Punkte)

A5)

a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebige quadratische Matrizen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(-A) = -\det(A)$, falls n gerade.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(A^T A) = \det(A)^2$.

b) Gegeben sei $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\det(C)$.

$\det(C) =$

(3+1=4 Punkte)

A1	A2	A3	A4	A5	Σ