Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 1
Dr. A. Prechtel

Mathematik für Ingenieure C1
2. Testat, 23.12.2016

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:
Unterschrift:

Falsch gesetzte Kreuze führen zu Punktabzug. Jeder Aufgabenblock A1) bis A7) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

A1) Gegeben sei das Polynom $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $Q(z) = z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 2z$. Es sei gegeben, dass $z_1 = 1$ und $z_2 = 1 + i$ Nullstellen von Q sind. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Die Summe aller Nullstellen $z_1, \ldots, z_4$ von Q ist eine reelle Zahl.

W F Q zerfällt über $\mathbb{R}$ vollständig in Linearfaktoren.

W F Es gibt ein Polynom P, sodass $Q(z) = P(z) \cdot (z^2 + 1)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(3 Punkte)

A2) Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F $Kern(f)$ ist ein Untervektorraum von W.

W F $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = (2x_1 - x_2 + 1, x_1 + x_2)^T$ ist eine lineare Abbildung.

W F $Kern(f) \neq \emptyset$.

(3 Punkte)

A3) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Das Gleichungssystem besitzt immer eine Lösung.

W F Das Gleichungssystem kann auch nur eine Lösung besitzen.

W F Das Gleichungssystem ist nie eindeutig lösbar.

(3 Punkte)

A4) Seien $z_i \in \mathbb{C}$ mit $z_i = r_i(\cos(\phi_i) + i\sin(\phi_i))$ für $r_i \in [0, \infty)$, $\phi_i \in [0, 2\pi)$ für $i = 1, 2$. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ $z_1 \cdot z_2 = (r_1 + r_2)(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ $Im\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -1$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ $z_1^2 = |z_1|^2$.

(3 Punkte)

A 5) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $V_1, V_2 \subset V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 = 1 - x_1 + x_2\}$ ist ein affin linearer Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Der Raum aller Polynome auf einem Definitionsbereich $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, ist endlich-dimensional.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Ist $\dim(V_1) + \dim(V_2) > \dim(V)$, dann ist $V_1 \subset V_2$ oder $V_2 \subset V_1$.

(3 Punkte)

A6) Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

im $\mathbb{R}^3$ und der Raum $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$ sind linear unabhängig.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ sind linear unabhängig.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Es gilt $\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$.

(3 Punkte)

A7) Gegeben sei ein LGS mit dem erweiterten Koeffizientenschema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{array}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Das LGS besitzt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass das LGS unendlich viele Lösungen besitzt.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Die Lösungsmenge des LGS ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie für $\alpha = 1$ die Lösungsmenge L des LGS.

$L =$

(3+1=4 Punkte)

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ

Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 1
Dr. A. Prechtel

Mathematik für Ingenieure C1
2. Testat, 23.12.2016

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:
Unterschrift:

Falsch gesetzte Kreuze führen zu Punktabzug. Jeder Aufgabenblock A1) bis A7) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

A1) Gegeben sei das Polynom $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $Q(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z$. Es sei gegeben, dass $z_1 = 2$ und $z_2 = 1 + i$ Nullstellen von Q sind. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F z_1 ist die einzige reelle Nullstelle von Q.

W F Die Summe aller Nullstellen $z_1, \ldots, z_4$ von Q ist eine reelle Zahl.

W F Es gibt ein Polynom P, sodass $Q(z) = P(z) \cdot (z^2 - 1)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(3 Punkte)

A2) Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F $Kern(f)$ ist ein Untervektorraum von W.

W F $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)^T$ ist eine lineare Abbildung.

W F $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(3 Punkte)

A3) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Das Gleichungssystem kann auch nur eine Lösung besitzen.

W F Das Gleichungssystem ist nie eindeutig lösbar.

W F Das Gleichungssystem besitzt immer eine Lösung.

(3 Punkte)

A4) Seien $z_i \in \mathbb{C}$ mit $z_i = r_i(\cos(\phi_i) + i\sin(\phi_i))$ für $r_i \in [0, \infty)$, $\phi_i \in [0, 2\pi)$ für $i = 1, 2$. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W | F | $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$.

W | F | $z_1 \cdot z_2 = (r_1 + r_2)(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$.

W | F | $Re\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = 1$.

(3 Punkte)

A 5) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $V_1, V_2 \subset V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W | F | $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 = 1 - x_1 + x_2\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

W | F | Falls $V = V_1 + V_2$ ist, dann gilt $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

W | F | Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, so bilden sie eine Basis von V.

(3 Punkte)

A6) Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

im $\mathbb{R}^3$ und der Raum $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W | F | Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ sind eine Basis von U.

W | F | Es gilt $\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.

W | F | $\dim(U) = 2$.

(3 Punkte)

A7) Gegeben sei ein LGS mit dem erweiterten Koeffizientenschema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{array}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W | F | Das LGS besitzt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung.

W | F | Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass das LGS unendlich viele Lösungen besitzt.

W | F | Die Lösungsmenge des LGS ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ die Lösungsmenge L des LGS.

$L =$

(3+1=4 Punkte)

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ

Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 1
Dr. A. Prechtel

Mathematik für Ingenieure C1
2. Testat, 23.12.2016

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:
Unterschrift:

Falsch gesetzte Kreuze führen zu Punktabzug. Jeder Aufgabenblock A1) bis A7) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

A1) Gegeben sei das Polynom $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $Q(z) = z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 6z$. Es sei gegeben, dass $z_1 = 3$ und $z_2 = 1 + i$ Nullstellen von Q sind. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Q hat genau zwei reelle Nullstellen.

W F Die Summe aller Nullstellen $z_1, \ldots, z_4$ von Q ist eine reelle Zahl.

W F Es gibt ein Polynom P, sodass $Q(z) = P(z) \cdot (z^2 - 3z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(3 Punkte)

A2) Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Bild(f) ist ein Untervektorraum von W.

W F $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = (2x_1 - x_2 + 1, x_1 + x_2)^T$ ist eine lineare Abbildung.

W F $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(3 Punkte)

A3) Seien $z_i \in \mathbb{C}$ mit $z_i = r_i(\cos(\phi_i) + i\sin(\phi_i))$ für $r_i \in [0, \infty)$, $\phi_i \in [0, 2\pi)$ für $i = 1, 2$. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F $\arg(1 - i) = \frac{7}{4}\pi$.

W F $z_1 + z_2 = (r_1 + r_2)(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$.

W F $Im\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -1$.

(3 Punkte)

A4) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen. Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Das Gleichungssystem kann auch nur eine Lösung besitzen.

W F Das Gleichungssystem ist nie eindeutig lösbar.

W F Das Gleichungssystem besitzt immer eine Lösung.

(3 Punkte)

A 5) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $V_1, V_2 \subset V$ Untervektorräume. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$ ist ein affin linearer Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

W F Es gilt $\dim(Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})) < \infty$.

W F Es gilt $\dim(V_1 + V_2) < \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

(3 Punkte)

A6) Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

im $\mathbb{R}^3$ und der Raum $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$ sind linear unabhängig.

W F Es existieren Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass $\boldsymbol{u}_4 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2$ gilt.

W F Es gilt $\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.

(3 Punkte)

A7) Gegeben sei ein LGS mit dem erweiterten Koeffizientenschema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{array}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind.

W F Das LGS besitzt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung.

W F Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass das LGS unendlich viele Lösungen besitzt.

W F Die Lösungsmenge des LGS ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ die Lösungsmenge L des LGS.

$L =$

(3+1=4 Punkte)

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ