

Klausur [Probe]

Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 Aussagenlogische Konsequenz

Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten:

1. $((A \wedge B) \rightarrow C) \models (A \rightarrow (B \rightarrow C))$,
2. $(A \rightarrow B) \models (B \rightarrow A)$,
3. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg A)) \models \perp$ (hier steht \perp für *falsum*),
4. $((A \vee B) \wedge A) \models \neg B$.

Im negativen Fall reicht es, wenn Sie ein einzelnes Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 2 Aussagenlogische Resolution

Wenden Sie den Resolutionsalgorithmus an, um zu entscheiden, ob die KNF

$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee C \vee B) \wedge (A \vee \neg D) \wedge (B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg A)$
erfüllbar ist.

Aufgabe 3 Unifikation

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$f(g(X, h(Z)), Z) \text{ und } f(g(h(Z), h(Z)), h(W))$$

unifizierbar sind und ggf. einen mgu zu berechnen. (Achtung: es ist durchaus von Bedeutung, dass die beiden Seiten gemeinsame Variablen verwenden!). Gefordert sind nicht nur die letztendliche Antwort, sondern auch die einzelnen vom Algorithmus durchgeführten Schritte.

Aufgabe 4 Logische Programmierung

Programmieren Sie in Prolog ein Prädikat `zip/3`, das eine Funktion implementiert, die die Elemente zweier Listen paarweise zu Zweierlisten verknüpft, d.h. es soll gelten

$$\text{zip}([a_1, \dots, a_n], [b_1, \dots, b_m], l) \iff l = [[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]]$$

mit $k = \min(n, m)$ – d.h. die übrigbleibenden Elemente der längeren Liste werden ignoriert. Programmieren Sie ferner eine Variante `zip2` von `zip`, in der die übrigbleibenden Elemente am Ende angehängt werden, d.h.

$$\text{zip2}([a_1, \dots, a_n], [b_1, \dots, b_m], l) \iff l = \begin{cases} [[a_1, b_1], \dots, [a_m, b_m], a_{m+1}, \dots, a_n] & (n \geq m) \\ [[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], b_{n+1}, \dots, b_m] & (m > n). \end{cases}$$

Aufgabe 5 Formale Deduktion

Geben Sie eine formale Herleitung mittels natürlicher Deduktion für die Formel

$$((A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (\neg(A \wedge B))) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

an.

Aufgabe 6 Induktion

Sei $\Sigma = \{fst/2, snd/2\}$, und sei \mathfrak{M} ein Σ -Modell, so dass für alle $x, y \in M$ gilt

$$\mathfrak{M}[\![fst]\!](x, y) = x \quad \mathfrak{M}[\![snd]\!](x, y) = y.$$

(d.h. $\mathfrak{M} \models \forall X, Y. (fst(X, Y) = X \wedge snd(X, Y) = Y)$). Zeigen Sie durch Induktion über E , dass für jeden Term E mit $FV(E) = \{X_1, \dots, X_n\}$ ein $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass für alle Umgebungen η gilt

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \eta(X_i)$$

(d.h. $\mathfrak{M} \models \forall X_1, \dots, X_n. E = X_i$).

Die Aufgaben sind untereinander gleich gewichtet; die Klausur ist mit der Hälfte der Punkte in jedem Fall bestanden.