Aufgabe 1 (Markov-Ketten) (30 Punkte)

Das **Geburtstagsproblem** beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen aus einer Gruppe am gleichen Tag im Jahr Geburtstag haben. Im Folgenden wird der 29. Februar vernachlässigt. Des Weiteren wird angenommen, dass die Geburtstage der n Personen unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen aus der diskreten Gleichverteilung der Menge $M = \{1.\text{ Jan.}, 2.\text{ Jan.}, \ldots, 31.\text{ Dez.}\}$ mit $|M| = 365$ sind.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen an einem Tag Geburtstag haben, wenn die Anzahl n gleich 366 ist? (2 Punkte)

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen an einem Tag Geburtstag haben, wenn die Anzahl n gleich 23 ist? (5 Punkte)

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für eine Person, an einem bestimmten Tag **nicht** Geburtstag zu haben? (2 Punkte)

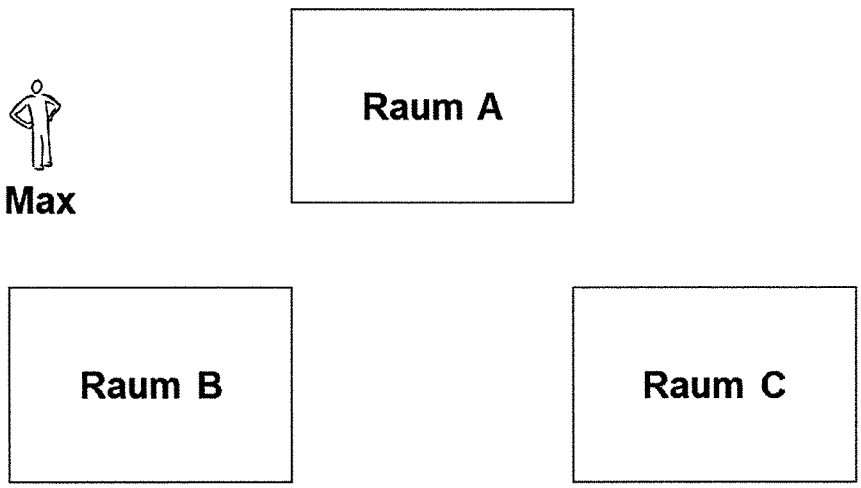


Abbildung 1:

Eine Gruppe von Personen ist beliebig auf drei Räume verteilt. Eine weitere Person (Max) wird nun einen beliebigen der drei Räume betreten und sich folgendermaßen verhalten:
(*umblättern*)

- Im Raum A wird Max mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % mindestens eine Person finden, die am gleichen Tag wie er Geburtstag hat. Im nächsten Schritt wird Max von Raum A in Raum B gehen, falls er eine solche Person gefunden hat. Wenn nicht, geht er von Raum A in Raum C.
- Im Raum B wird Max mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % mindestens eine Person finden, die am gleichen Tag wie er Geburtstag hat. Im nächsten Schritt wird Max von Raum B in Raum C gehen, falls er eine solche Person gefunden hat. Wenn nicht, geht er von Raum B in Raum A.
- Im Raum C wird Max mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % mindestens eine Person finden, die am gleichen Tag wie er Geburtstag hat. Im nächsten Schritt wird Max von Raum C in Raum A gehen, falls er eine solche Person gefunden. Wenn nicht, geht er von Raum C in Raum B.

d) Kann die oben dargestellte Situation mittels einer Markov-Kette dargestellt werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

e) Erstellen Sie – falls möglich – eine Markov-Kette für obiges Szenario. Was bedeuteten die Zustände der Markov-Kette konkret? Verwenden Sie dabei so wenige Zustände wie möglich. (4 Punkte)

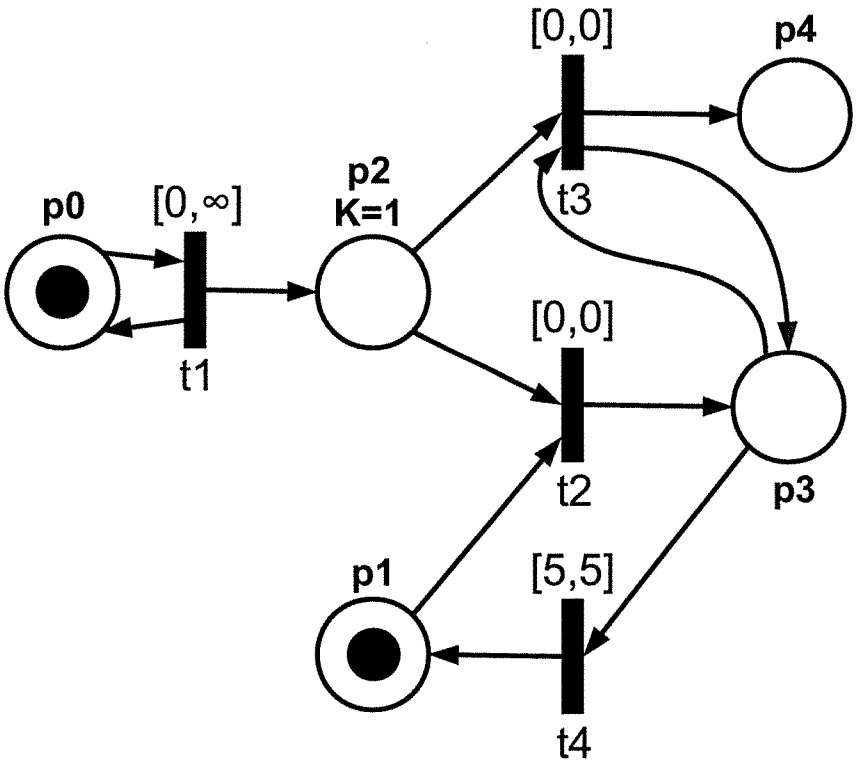
f) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P für die in Teilaufgabe e) erstellte Markov-Kette. (3 Punkte)

g) Max geht zuerst in Raum A. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die nach zwei weiteren Schritten im Raum A ist? (4 Punkte)

h) Was bedeutet der Begriff stationärer Zustandsvektor? Hat diese Markov-Kette einen stationären Zustandsvektor? Wenn ja, geben Sie diesen Vektor an. (8 Punkte)

Aufgabe 2 (Petri-Netze) (30 Punkte)

Die Effizienz eines Milchviehbetriebes soll durch die Anschaffung einer Melkanlage gesteigert werden. Möchte eine Kuh gemolken werden, tritt sie vor die Anlage, wird von einem Sensor erkannt und nachfolgend gemolken. Der Melkvorgang dauert dabei genau 5 Zeiteinheiten und es kann nur eine Kuh gleichzeitig gemolken werden. Die Melkanlage wurde durch folgendes zeitbehaftetes Petri-Netz mit Anfangsmarkierung $M_0 = (1,1,0,0,0)$ modelliert:



Erläuterungen zum Netz:

i) Die Transition $t1$ kann zu beliebigen Zeitpunkten feuern. Sie stellt den Sensor dar, der eine vor der Anlage befindliche Kuh erkennt. Durch das Feuern von $t1$ kann also das Eintreffen von melkbereiten Kühen simuliert werden.

ii) Falls sich eine Marke in $p3$ befindet, wird gerade eine Kuh gemolken.

iii) Da immer nur eine Kuh vor den Sensor treten kann, ist die Stelle $p2$ auf eine Kapazität von $K = 1$ beschränkt.

Beantworten Sie folgende Fragen zum Netz:

a) Szenario: Transition $t1$ schaltet zu den Zeitpunkten $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 4$ und $\tau_3 = 6$. Geben Sie eine mögliche Feuerungssequenz unter der Annahme an, dass $t1$ nur zu oben genannten Zeitpunkten feuert. (3 Punkte)

b) Was bedeutet die Anzahl der Marken auf $p4$ in Bezug auf die Melkanlage? (3 Punkte)

c) Wandeln Sie das Petri-Netz in ein äquivalentes Petri-Netz ohne Kapazitätsbeschränkungen um. (3 Punkte)

Auf Grund ihrer schlechten Effizienz sei die Melkanlage wie folgt modernisiert: Die Anlage kann von mehreren Kühen betreten werden, so dass die Kapazitätsbeschränkung der Stelle $p2$ aufgehoben ist. Auch wurde die Melkgeschwindigkeit soweit gesteigert, dass die Zeitdauer des Melkvorgangs nicht mehr ins Gewicht fällt und *keine* Transitionen mehr zeitlichen Beschränkungen aufweisen.

d) Zeigen Sie formal, dass die Markierung $M_1 = (1,1,0,1,0)$ vom Anfangszustand aus nicht erreichbar ist. Was bedeutet das für die Melkanlage? (4 Punkte)

e) Was bedeutet es, wenn eine Stelle nicht sicher ist? Entscheiden Sie durch Berechnung der Stelleninvariante, welche Stellen des gegebenen Petri-Netzes nicht sicher sind. Was kann aus der berechneten Stelleninvariante bei Anfangsmarkierung $M_0 = (1,1,0,0,0)$ für die anderen Stellen gefolgert werden? Interpretieren Sie das Ergebnis der gesamten Teilaufgabe in Bezug auf die Melkanlage.

(7 Punkte)

f) Entscheiden Sie anhand der Transitionsinvarianten, ob das Netz reversibel ist. (4 Punkte)

g) Betrachten Sie für diese Teilaufgabe das Netz ohne die Stelle $p4$. Erläutern Sie den Begriff „Deadlock". Geben Sie den Erreichbarkeitsgraphen dieses Petri-Netzes, ausgehend von $M_0' = (1,1,0,0)$, an und begründen Sie anhand dieses Graphen, ob das Netz deadlockfrei ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3 (Verifikation) (30 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Ketten von 1-Bits der Mindestlänge 4 in einem binären Bitstrom erkannt werden. Ein Beispiel für einen Bitstrom mit zwei solcher Ketten sieht dabei wie folgt aus:

$$\ldots 000\mathbf{1111}0101000\mathbf{1111}001\ldots$$

Der Erkenner soll als endlicher Zustandsautomat – in diesem Fall als Moore-Automat – beschreiben werden. Bei einem Moore-Automat hängt die Ausgabe vom aktuellen Zustand ab. Der Automat soll *true* ausgeben, wenn die letzten 4 eingelesenen Bits alle eine 1 darstellten. Andernfalls soll *false* ausgegeben werden.

a) Wie viele Zustände hat der Erkenner mindestens? Wie viele Bits werden mindestens benötigt, um diese Zustände zu kodieren? (2 Punkte)

b) Beschreiben Sie den endlichen Zustandsautomaten mittels vollständigem Zustandsübergangsdigramm. Vergessen Sie nicht die Beschriftung der Zustände und der Transitionen! (6 Punkte)

c) Geben Sie eine Kodierung σ der Zustände aus Aufgabenteil b) mit drei Bits an. (2 Punkte)

d) Erstellen Sie die charakteristische Funktion $\psi_f(\sigma(s), \sigma(s'))$ der Transitionsrelation f des Automaten aus Aufgabenteil b). Dabei bezeichnen $\sigma(s) = s_0 s_1 s_2 \in \{0,1\}^3$ und $\sigma(s') = s'_0 s'_1 s'_2 \in \{0,1\}^3$ die in Aufgabenteil c) bestimmten Kodierungen der Zustände. (5 Punkte)

e) Bestimmen Sie mittels symbolischer Methoden die Menge der direkten Nachfolgezustände des Anfangszustands (nur 1 Schritt). (5 Punkte)

f) Formulieren Sie folgenden Eigenschaften des Automaten als CTL-Formeln: (4 Punkte)
   - Der Zustand mit Ausgabe *true* ist erreichbar.
   - Es ist möglich aus jedem Zustand direkt wieder in den Anfangszustand zu kommen.

g) Zeichnen Sie den reduzierten OBDD für folgende Funktion:

$$f(a,b,c,d) = (a\ AND\ c)\ OR\ (a\ AND\ b)\ OR\ (c\ AND\ d)\ OR\ (b\ AND\ d)$$

Verwenden Sie dabei die Variablenordnung $a \prec b \prec c \prec d$. (4 Punkte)

h) Gibt es für die Boolesche Funktion aus Aufgabenteil g) eine Variablenordnung um einen kleineren OBDD zu erhalten? Falls ja, geben Sie eine an, andernfalls begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)