Universität Erlangen-Nürnberg
Technische Fakultät, Institut für Informatik
Lehrstuhl für Hardware-Software-Co-Design

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Teich

Klausur
Ereignisgesteuerte Systeme

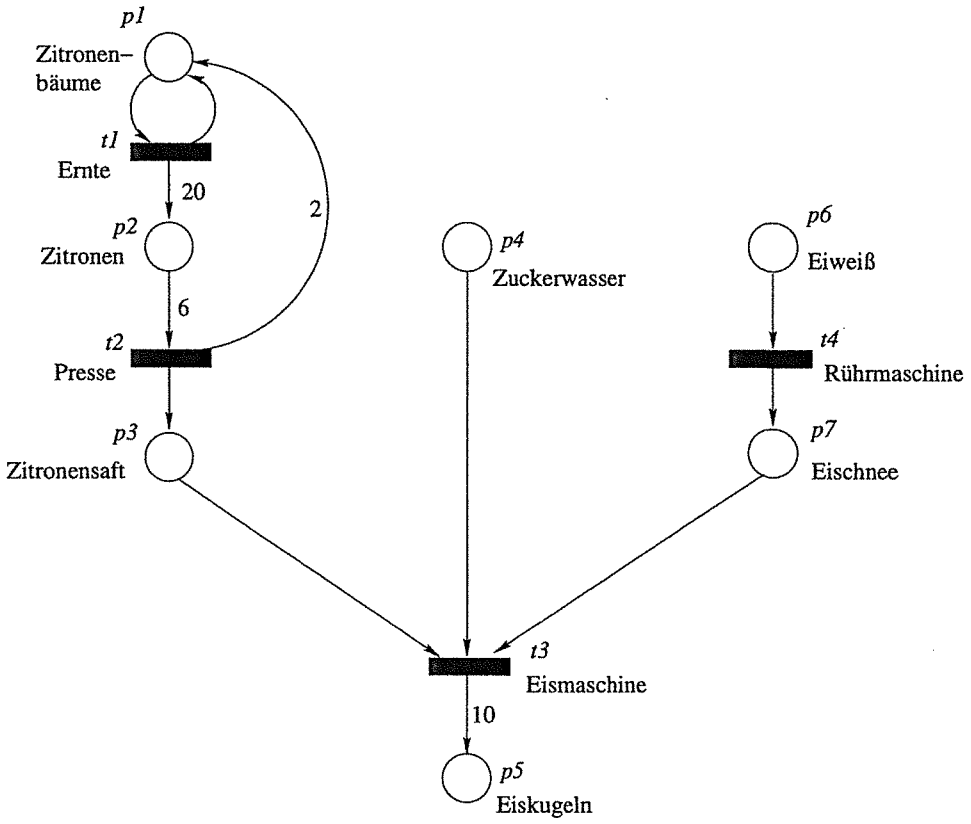
17. September 2007

Name	
Matrikelnummer	
Studienrichtung	

Aufgabe	1	2	3	Σ
max. Punkte	30	30	30	90
erreichte Punkte				
Note				

Aufgabe 1 (Petri-Netze und zeitbehaftete Automaten) (30 Punkte)

Folgendes Petri-Netz modelliert eine Eismaschine, die frischgepressten Zitronensaft, Zuckerwasser und Eischnee zu Eiskugeln verarbeiten kann.



Erläuterungen zum Netz:

- Ein Token entspricht in
  - p1: 1 Zitronenbaum
  - p2: 1 Zitrone
  - p3: $250ml$ Zitronensaft
  - p4: $250ml$ Zuckerwasser
  - p5: 1 Kugel Eis
  - p6: 1 Eiweiß
  - p7: 1 Portion Eischnee
- Die Presse $t2$ erzeugt aus 6 Zitronen $250ml$ Zitronensaft. Außerdem werden die gewonnenen Kerne ausgesäht; es entstehen im Schnitt aus 6 Zitronen 2 Zitronenbäume.

a) Stellen Sie die Inzidenzmatrix A des Petri-Netzes auf. Orientieren Sie sich dabei an der Nummerierung der Stellen und Transitionen. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie formal unter Verwendung der Inzidenzmatrix A, dass $M_1 = (1,14,0,0,10,0,0)$ nicht aus $M_0 = (1,0,0,1,0,1,0)$ erreichbar ist. (5 Punkte)

c) Stellen Sie den Erreichbarkeitsgraphen für die Anfangsmarkierung M_0 auf. (7 Punkte)

   i) Ist das Netz deadlockfrei? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

   ii) Welche Stellen sind nicht sicher? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

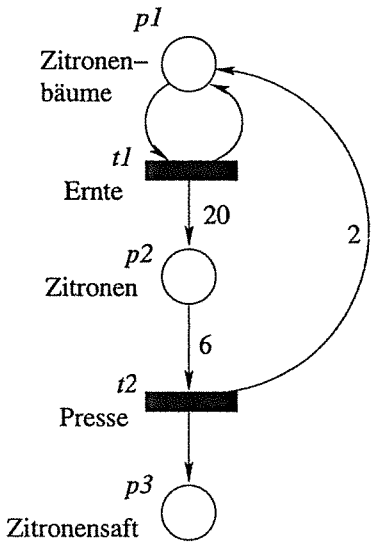
   iii) Kann man aus dem Erreichbarkeitsgraphen schließen, dass M_1 nicht aus M_0 erreichbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

d) Entscheiden Sie anhand der Transitionsinvarianten, ob das Netz reversibel ist. (3 Punkte)

e) Wann hat ein Petri-Netz einen Konflikt? Hat das gegebene Petri-Netz einen Konflikt? Falls ja, markieren Sie diesen, falls nein, zeichnen Sie ein Beispiel eines Konflikts. (2 Punkte)

f) Angenommen, im Garten des Eisverkäufers haben maximal 5 Zitronenbäume Platz, d.h. die Kapazität von $p1$ ist durch $K = 5$ beschränkt. Formen Sie dieses kapazitätsbeschränkte Petri-Netz in ein äquivalentes Petri-Netz ohne kapazitätsbeschränkte Stellen um. (2 Punkte)

Betrachten Sie folgenden Ausschnitt des gegebenen Petri-Netzes:



g) Wandeln Sie diesen Ausschnitt in ein zeitbehaftetes Petri-Netz um. Es gelten folgende zeitlichen Einschränkungen: (4 Punkte)

   – Es wird nur einmal im Jahr immer zum gleichen Zeitpunkt geerntet.

   – Die Presse wird nur einmal pro Monat betätigt. Sie hat bis zu 11 Monate Zeit, ankommende Zitronen zu verarbeiten, da dann das Lager aufgrund der anstehenden Ernte wieder leer sein muss.

Aufgabe 2 (Verifikation) (30 Punkte)

In dieser Aufgabe soll ein sogenannter „Modulo-5-Zähler" modelliert und analysiert werden. Ein „Modulo-N-Zähler" berechnet den jeweils nächsten Wert mittels folgender Berechnungsvorschrift:

$$f(k+1) = (f(k)+1)\ mod\ N, \text{ wobei}$$
$$a\ mod\ N = a - \lfloor \tfrac{a}{N} \rfloor \cdot N$$

Der „Modulo-5-Zähler" soll als endlicher Zustandsautomat beschrieben werden. Der Anfangszustand soll den Wert 0 darstellen. Wenn das Ereignis *next* auftritt, soll weitergezählt werden. Falls das Ereignis *reset* auftritt, soll immer zurück zum Anfangszustand gegangen werden.

a) Wie viele Zustände hat der „Modulo-5-Zähler" höchstens? Wie viele Bits werden mindestens benötigt, um diese Zustände zu kodieren? (2 Punkte)

b) Beschreiben Sie den endlichen Zustandsautomaten mittels vollständigem Zustandsübergangsdiagramm. Vergessen Sie nicht die Beschriftung der Zustände und der Transitionen! (6 Punkte)

c) Geben Sie eine Kodierung σ der Zustände aus Aufgabenteil b) mit drei Bits an. (2 Punkte)

d) Erstellen Sie die charakteristische Funktion $\psi_f(\sigma(s), \sigma(s'))$ der Transitionsrelation f des Automaten aus Aufgabenteil b). Dabei bezeichnen $\sigma(s) = s_0 s_1 s_2 \in \{0,1\}^3$ und $\sigma(s') = s'_0 s'_1 s'_2 \in \{0,1\}^3$ die in Aufgabenteil c) bestimmten Kodierungen der Zustände. (5 Punkte)

e) Bestimmen Sie mittels symbolischer Methoden die Menge der direkten Nachfolgezustände des Anfangszustands (nur 1 Schritt). (5 Punkte)

f) Formulieren Sie folgenden Eigenschaften des Automaten als CTL-Formeln: (4 Punkte)
   - Der Zustand 3 ist erreichbar.
   - Es ist möglich, aus jedem Zustand direkt wieder in den Anfangszustand zu kommen.

g) Zeichnen Sie den reduzierten OBDD für folgende Funktion:

$$f(a,b,c,d) = (a\ AND\ b)\ OR\ (a\ AND\ c)\ OR\ (b\ AND\ d)\ OR\ (c\ AND\ d)$$

Verwenden Sie dabei die Variablenordnung $a \prec b \prec c \prec d$. (4 Punkte)

h) Gibt es für die Boolesche Funktion aus Aufgabenteil g) eine Variablenordnung die zu einem kleineren OBDD führt? Falls ja, geben Sie eine an, andernfalls begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

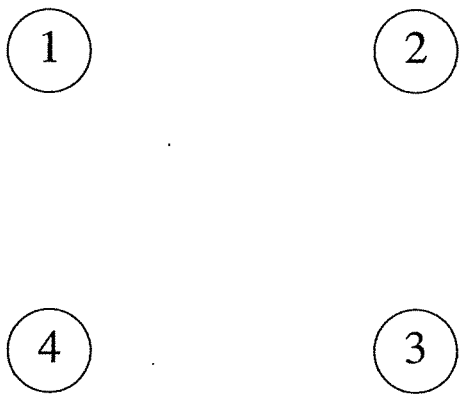
Aufgabe 3 (Markov-Ketten) (30 Punkte)

Im Laufe einer soziologischen Studie hat sich herausgestellt, dass man das Verhalten der zu einem bestimmten Thema befragten Menschen mit Hilfe einer Markovkette mit vier Zuständen und der unten aufgeführter Übergangsmatrix modellieren kann:

Zustand	Bedeutung
1	*entschiedene Ablehnung*
2	*überwiegende Ablehnung*
3	*überwiegende Zustimmung*
4	*entschiedene Zustimmung*

$$P = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}06 & 0{,}76 & 0{,}18 & 0 \\ 0 & 0{,}27 & 0{,}69 & 0{,}04 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Zeichnen Sie die Zustandsübergänge mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus der Übergangsmatrix in die unten stehende Abbildung ein. (6 Punkte)



b) Erläutern Sie den Begriff der rückkehrenden und der transienten Zustände! (2 Punkte)

c) Welche Zustände aus der Teilaufgabe a) sind rückkehrend und welche transient? (2 Punkte)

d) Gegeben sei die folgende Anfangsverteilung $\pi(0) = (0 \;\; 0{,}7 \;\; 0{,}3 \;\; 0)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in 2 Schritten im Zustand 1 zu sein? (4 Punkte)

e) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person, die sich in einem „Konflikt-Zustand" (Zustand 2 oder Zustand 3) befindet, irgendwann einmal in den Zustand 4 überwechselt. (10 Punkte)

Dafür werden folgende Definitionen benötigt:

- Mit f_{ik} bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ausgehend vom Zustand i *irgendwann einmal* Zustand k erreicht.
- Da wir uns für die Wahrscheinlichkeiten f_{24} und f_{34} interessieren, können wir folgendes festlegen (mit S als der Menge der 4 Zustände):

$$f_{i4} = \sum_{j \in S} p_{ij} \cdot f_{j4}, \text{ für } p_{ij} \text{ siehe die Übergangsmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f_{14} &= 0, \\ f_{44} &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Hinweis:
Die Gleichung (1) besagt, dass die gesuchten Wahrscheinlichkeiten $f_{i4}, i \in \{2,3\}$ sich aus einer Matrix-Vektor-Multiplikation der Übergangsmatrix P mit dem Vektor $\vec{f} = (f_{14}, f_{24}, f_{34}, f_{44})^T$, bzw. durch das Lösen des daraus entstehenden linearen Gleichungssystems, berechnen lassen.

f) Was beschreibt die stationäre Zustandswahrscheinlichkeit und welche Bedingungen sind hinreichend für ihre Existenz? (3 Punkte)

g) Mit welcher Formel kann man die Beziehung zwischen den Wahrscheinlichkeiten f_{21} und f_{24} beschreiben, wenn man bedenkt, dass man nach einer gewissen Zeit sicher in einem der Zustände 1 oder 4 landen wird? Gilt die gleiche Beziehung auch für die Wahrscheinlichkeiten f_{31} und f_{34}? (3 Punkte)