

## Algorithmik kontinuierlicher Systeme — 19. Juli 2018

**Angaben zur Person (Bitte in DRUCKSCHRIFT ausfüllen!):**

Name, Vorname: \_\_\_\_\_

Geburtsdatum: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Studienfach: \_\_\_\_\_

**Nicht von der Kandidatin bzw. vom Kandidaten auszufüllen!**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Max. Punktzahl	10	9	9	13	9	11	12	10	7
Erreichte Punkte									

<b>Gesamtpunktzahl</b>	
<b>Note</b>	

## Organisatorische Hinweise

Die folgenden Hinweise bitte aufmerksam lesen und die Kenntnisnahme durch Unterschrift bestätigen!

- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Personenkontrolle bereit.
- Hilfsmittel (außer Schreibmaterial und Lineal) sind nicht zugelassen. Elektronische Geräte sind auszuschalten.
- Fragen zu den Prüfungsaufgaben werden grundsätzlich nicht beantwortet.
- Die Lösung einer Aufgabe muss auf das jeweilige Aufgabenblatt geschrieben werden. Sollte der Platz nicht reichen, verwenden Sie die Zusatz-Seiten am Ende der Klausur. Fügen Sie einen Hinweis in Ihre Lösung ein, wenn die Lösung auf den Zusatz-Seiten fortgesetzt wurde und beschriften Sie diese mit Namen und Aufgabennummer.
- Es können durch die Aufsicht zusätzlich Seiten eingeklebt werden, sollte mehr Platz benötigt werden. Bitte beschriften Sie den Kopf dieser Seiten mit Ihrem Namen und Matrikelnummer. Streichen Sie alles, was nicht verwendet werden soll, doppelt aus.
- Die Programmieraufgaben sind in der Programmiersprache Python 3 zu bearbeiten.
- Wenn Sie die Prüfung aus gesundheitlichen Gründen abbrechen müssen, so muss Ihre Prüfungsunfähigkeit durch eine Untersuchung bei einem Vertrauensarzt nachgewiesen werden. Melden Sie sich bei der Aufsicht und lassen Sie sich das entsprechende Formular aushändigen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Überprüfen Sie die Prüfungsaufgaben auf Vollständigkeit (20 Seiten inklusive Deckblatt) und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, auf dem Deckblatt die Angaben zur Person einzutragen und die **Erklärungen auf dieser Seite zu unterschreiben**.
- Viel Erfolg!

## Erklärungen

Durch meine Unterschrift bestätige ich den Empfang der vollständigen Klausurunterlagen und die Kenntnisnahme der obigen Informationen.

Erlangen, 19. Juli 2018

---

(Unterschrift)

**Aufgabe 1 — Theoriefragen (10 Punkte)**

a) Beantworten Sie die folgenden Fragen! Schreiben Sie Ihre Antwort in die rechte Spalte der Tabelle!

Sei $\mathbf{A}$ eine $(n \times n)$ -Matrix. Welche Komplexität hat das Bestimmen der LR-Zerlegung von $\mathbf{A}$ .	$\mathcal{O}(\quad)$
Welche Komplexität hat die Bestimmung der Determinante einer $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ , wenn die LR-Zerlegung von $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ bereits bekannt ist?	$\mathcal{O}(\quad)$
Wie groß ist der Approximationsfehler des Catmull-Rom-Interpolanten bei Schrittweite $h$ ?	$\mathcal{O}(\quad)$
Sei $x$ und $y$ jeweils ein $n$ -Vektor. Welche Komplexität hat die Berechnung des Skalarprodukts $x^T y$ ?	$\mathcal{O}(\quad)$
Welche Konditionszahl besitzt eine Rotationsmatrix bezüglich der Spektralnorm?	
Ein Zelle im D2Q9 Lattice-Boltzmann Verfahren hat die Einträge $f_1, \dots, f_9$ . Wie berechnen Sie daraus die Dichte $\rho$ dieser Zelle?	$\rho =$

b) Sind folgende Gleichungssysteme  $Ax = b$  überbestimmt, unterbestimmt oder eindeutig lösbar?

	überbestimmt	unterbestimmt	eindeutig lösbar
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 2 — QR-Zerlegung (9 Punkte)**a) Von der Matrix  $A$  ist folgende QR-Zerlegung bekannt:

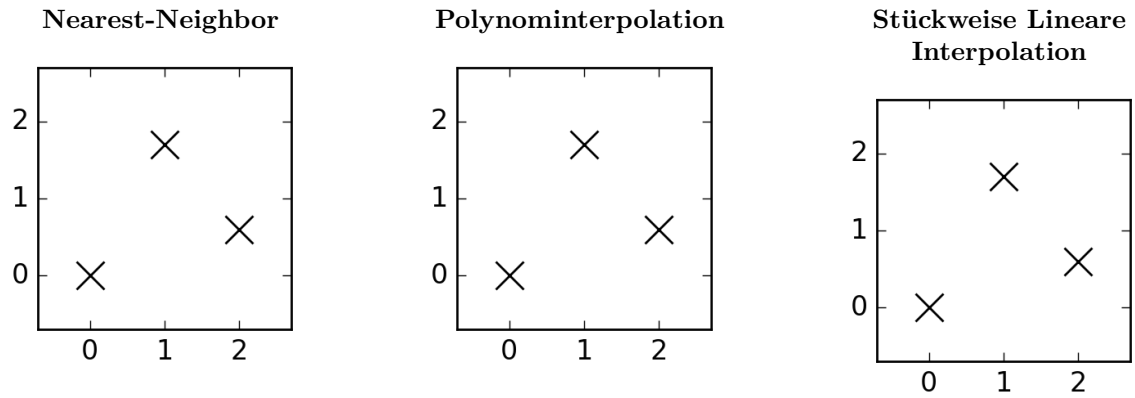
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 5 \\ -2 & -2 & -6 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  für  $b = [8, 10, -6, 0]^T$  nach  $x$  **und** berechnen Sie den Betrag der Determinante von  $A$ .



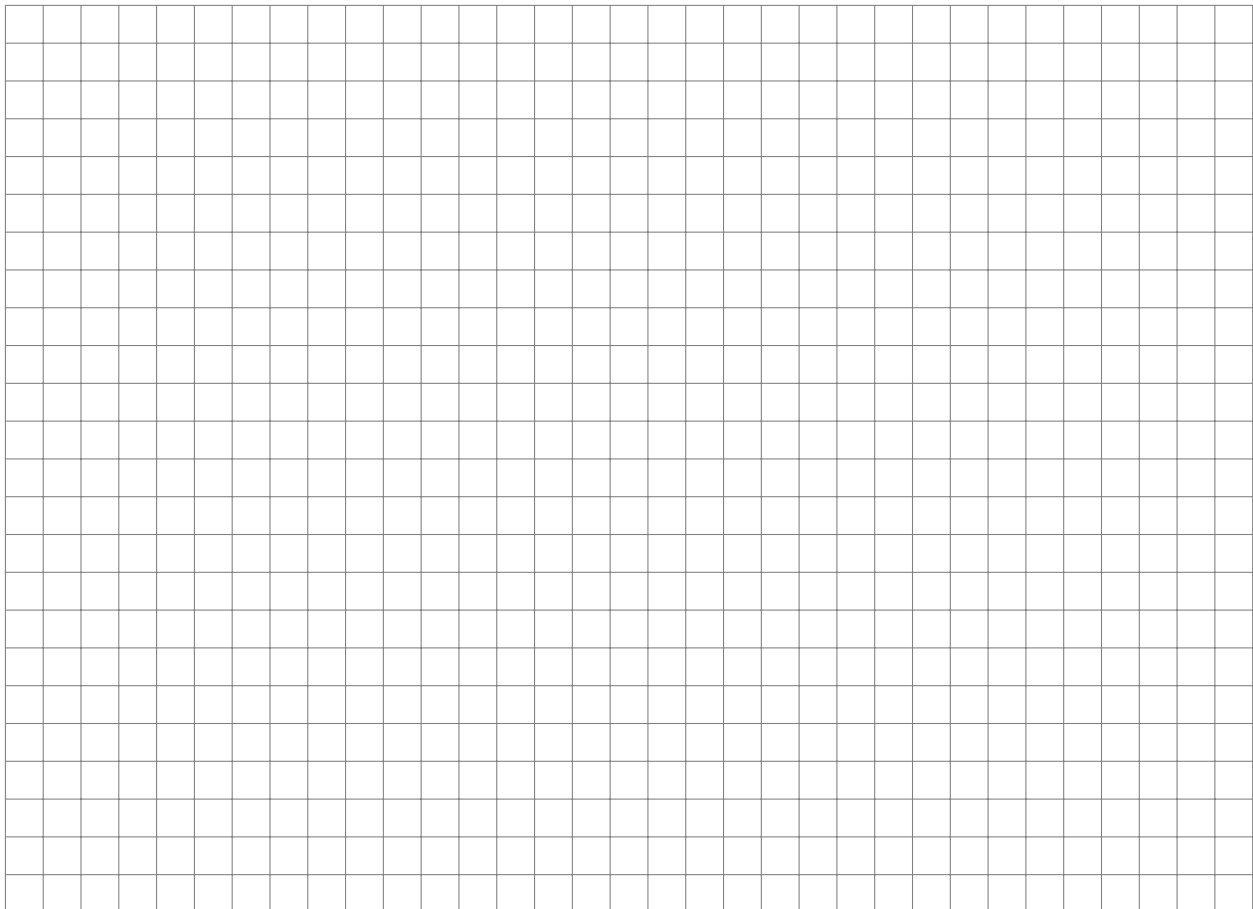
### Aufgabe 3 — Interpolation (9 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Interpolationsfunktionen zu den eingezeichneten Stützstellen:



b) Bestimmen Sie die Koeffizienten des Newton-Interpolationspolynoms zu den Folgenden Punkten:

$i$	0	1	2	3
$x_i$	0	1	2	4
$y_i$	2	1	4	-2





- Prüfen, ob eine Zeichenkette `string` ein Charakter `char` enthält.

```

:   :   :   :   :
:   :   :   :   :
:   :   :   :   :
:   :   :   :   :
:   :   :   :   :
:   :   :   :   :
:   :   :   :   :
:   :   :   :   :
:   :   :   :   :
:   :   :   :   :

```

b) Was geben folgende Codeschnipsel aus?

```

a = -2
for i in range(3):
    a += i*i
print(a)

```

Ausgabe: \_

```

A = np.zeros((2,2))
A[:,0] = 1
A[:,1] = list(range(2,4))
print((A[0,:] + A[1,:])[1])

```

Ausgabe: \_

```

def magic(a, i):
    if i == 0:
        return a[i]
    else:
        return magic(a[1:], i-1)

```

```

A = np.array([0,5,2])
print(magic(A, 2))

```

Ausgabe: \_

```

a = [0, 0, 0, 0]
i, a[i], i, a[i] = [0, 1, 2, 3]
print(a)

```

Ausgabe: [ \_ , \_ , \_ , \_ ]

```

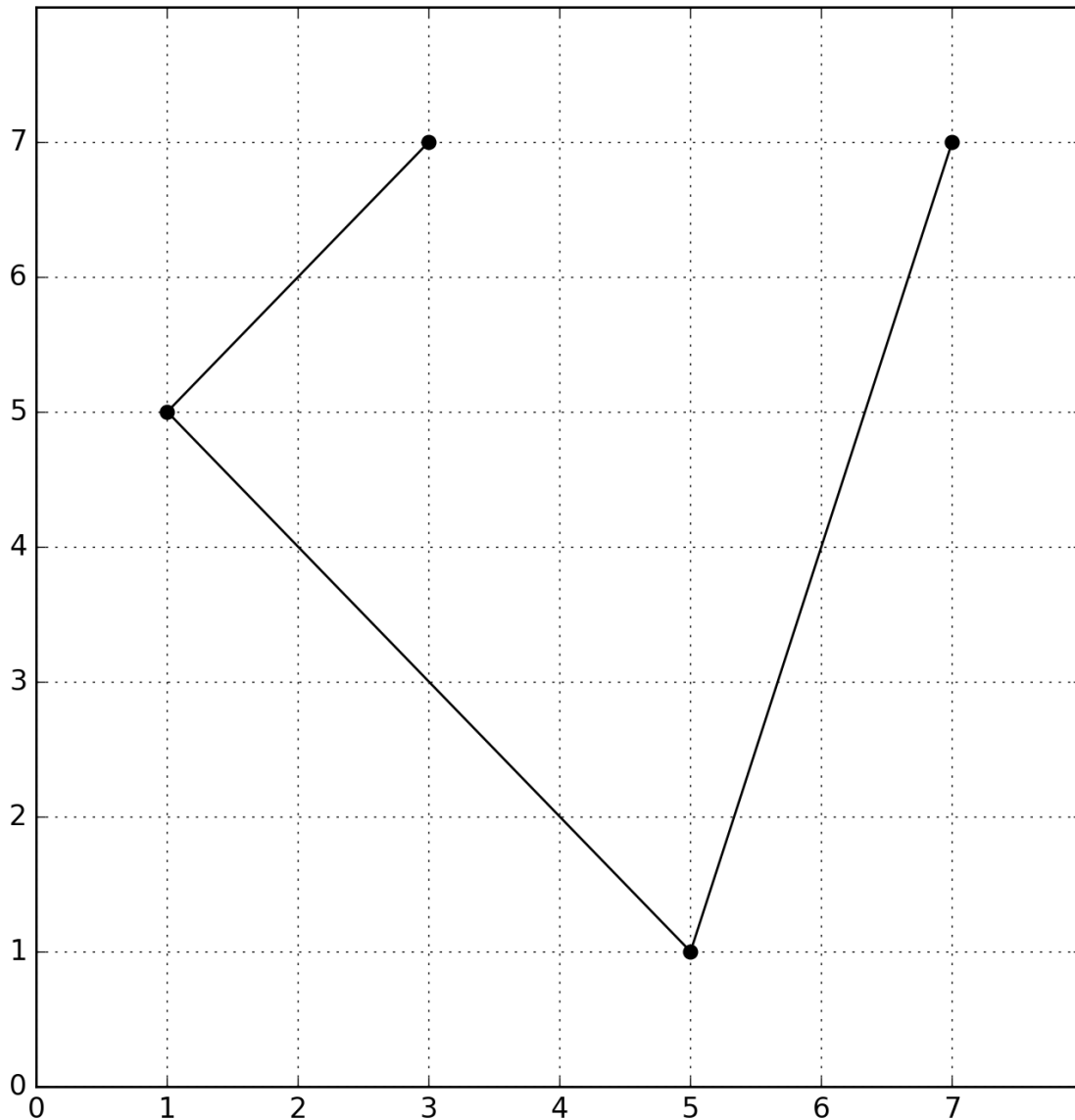
l1 = [[1]]*2
l1[0].append(2)
print(l1[-1][-1])

```

Ausgabe: \_

**Aufgabe 5 — Bézierkurven (9 Punkte)**

a) Bestimmen Sie graphisch zum gegebenen Kontrollpolygon den Punkt der zugehörigen Bézierkurve mit Parameter  $t = \frac{1}{2}$ .



b) Geben Sie nun die Eckpunkte von zwei anderen Kontrollpolygonen an, die zusammen genau die gleiche Bézierkurve beschreiben.

$$(x_1, y_1) = ( \quad , \quad ) \quad (x_2, y_2) = ( \quad , \quad ) \quad (x_3, y_3) = ( \quad , \quad ) \quad (x_4, y_4) = ( \quad , \quad )$$

$$(x_1, y_1) = ( \quad , \quad ) \quad (x_2, y_2) = ( \quad , \quad ) \quad (x_3, y_3) = ( \quad , \quad ) \quad (x_4, y_4) = ( \quad , \quad )$$



c) Nennen Sie drei Formeigenschaften von Bézierkurven.

•

•

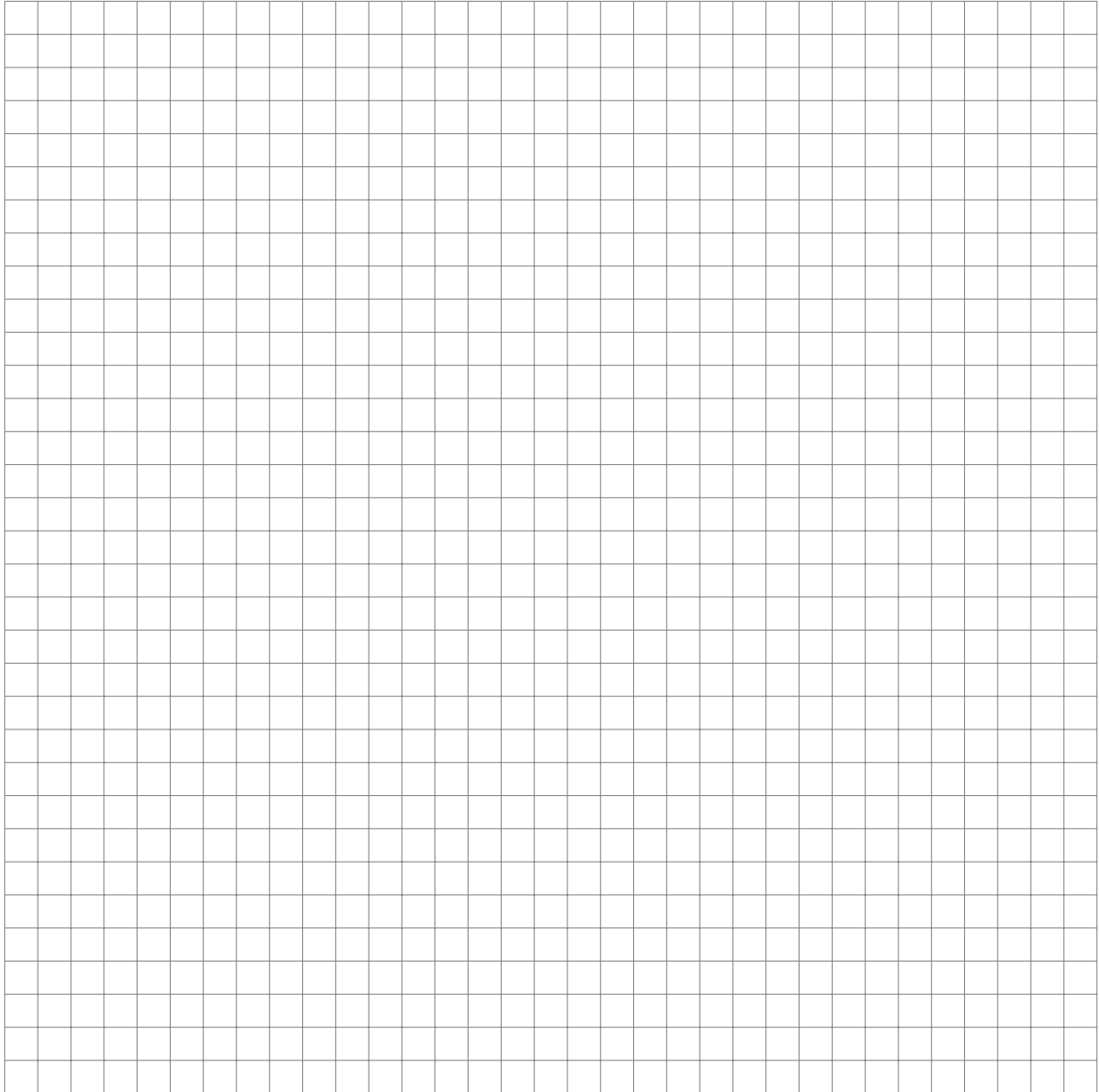
•

**Aufgabe 6 — Iterative Lösungsverfahren (11 Punkte)**

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem  $Ax = b$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

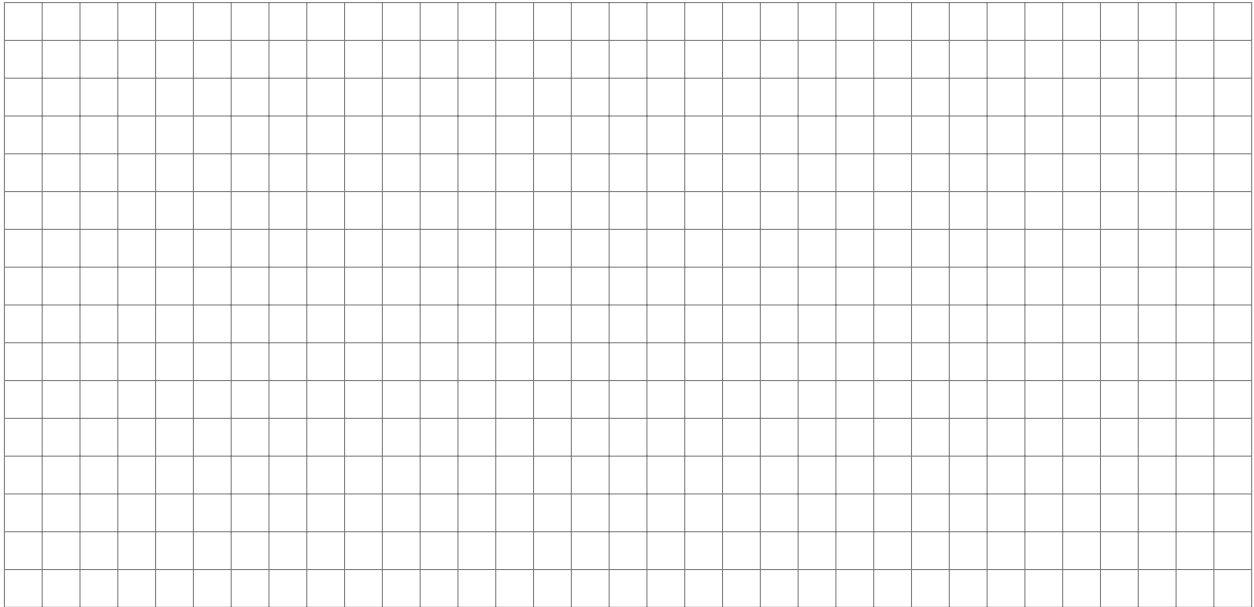
a) Führen Sie einen Iterationsschritt des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startwert  $[1, 2, 3]^T$  aus. Der Rechenweg muss erkennbar sein.



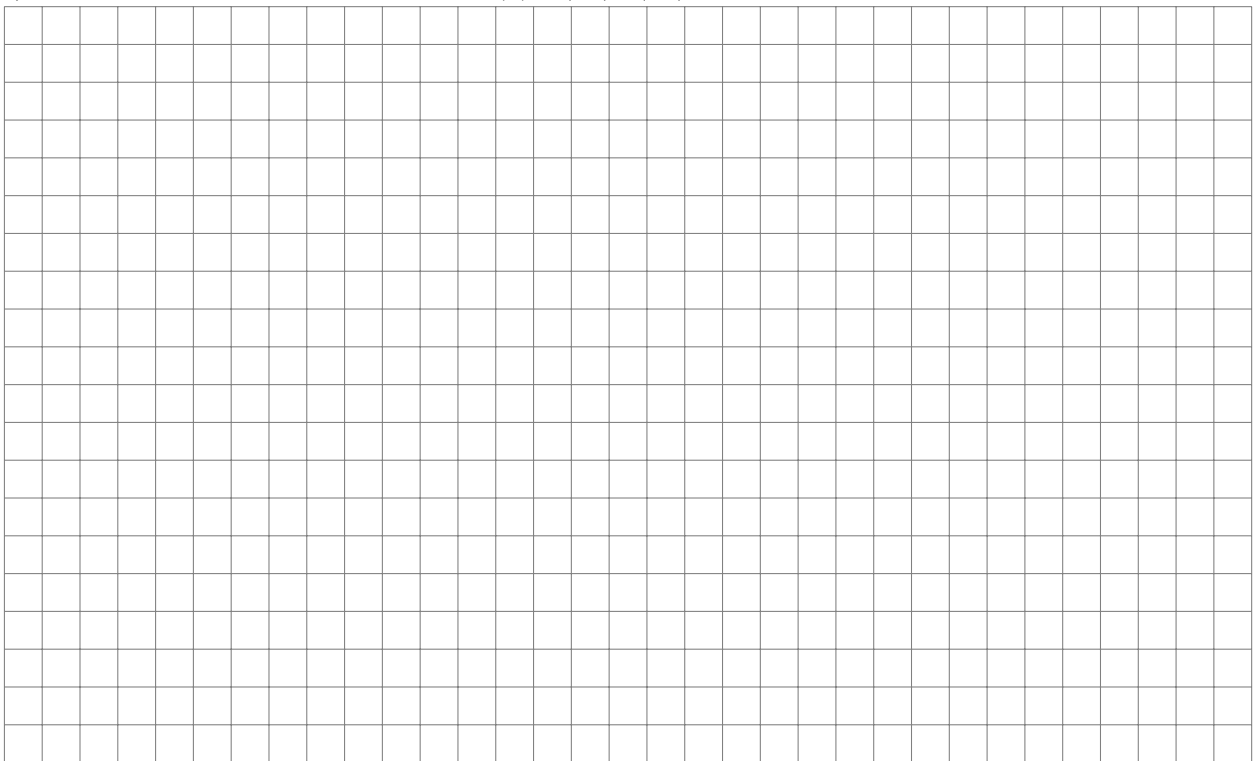




c) Geben Sie an, durch welche 3 Eigenschaften eine Vektornorm definiert ist.



d) Prüfen Sie ob die gegebene Funktion  $f(\vec{x}) = |x_1| + |x_2|$  eine Norm im  $\mathbb{R}^2$  ist.

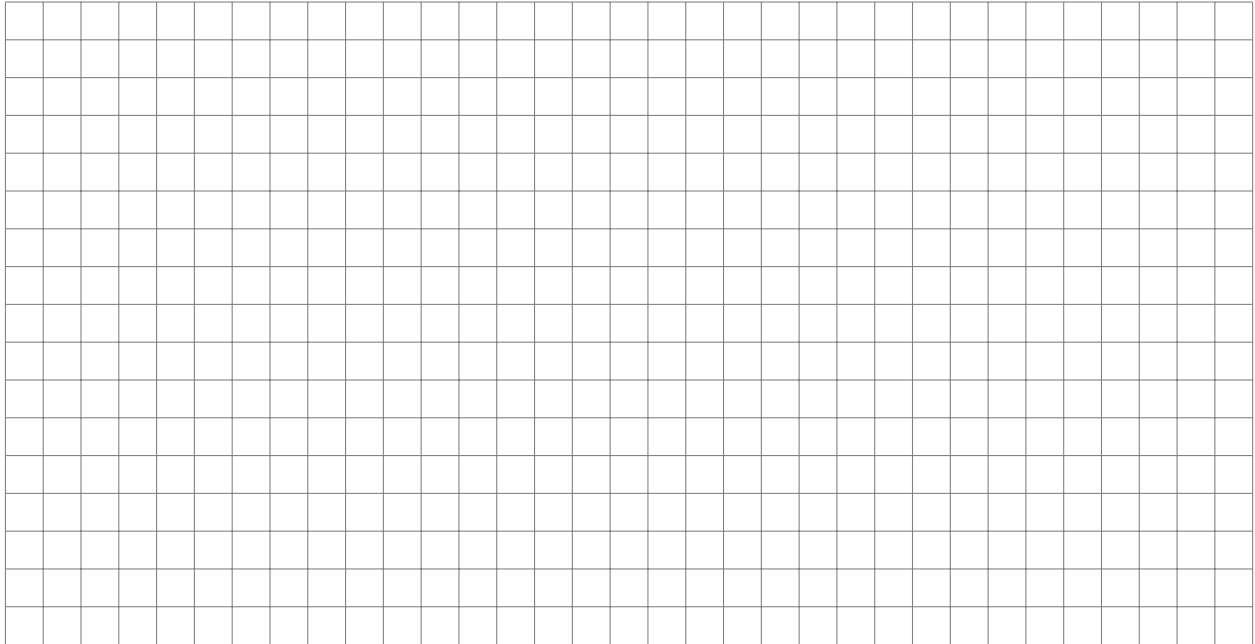


**Aufgabe 8 — Nichtlineare Optimierung (10 Punkte)**

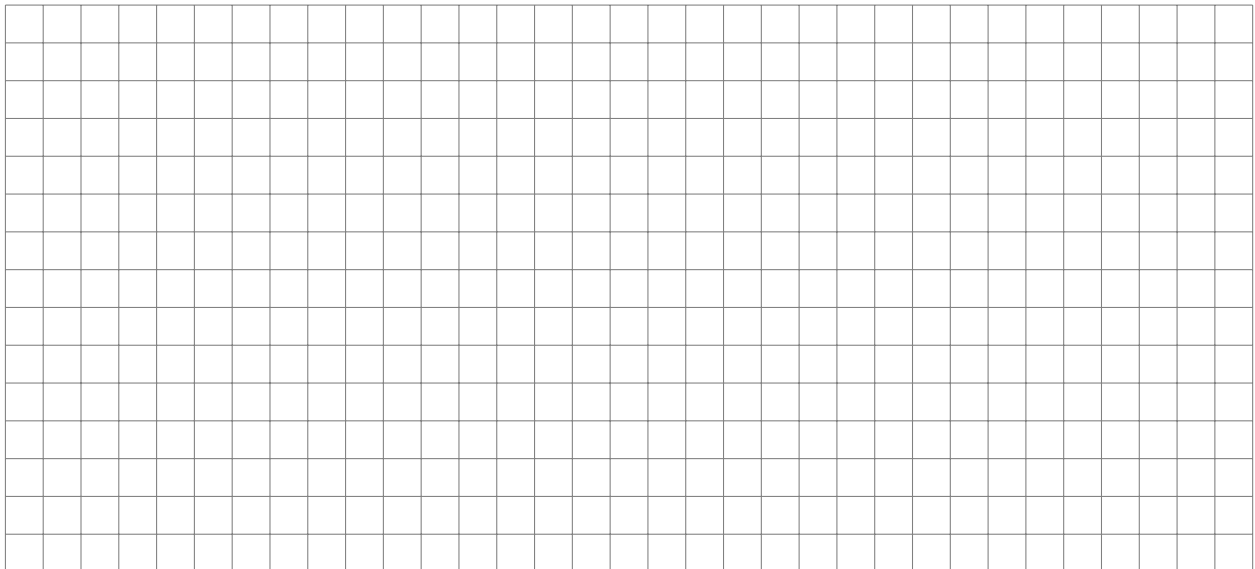
Sie versuchen, das Minimum der folgenden Funktion zu bestimmen:

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2 - 2xy - 3y + 42$$

a) Berechnen Sie die Jacobi- und die Hessematrix von  $F(x, y)$ .



b) Führen Sie einen Schritt des Gradientenabstiegs-Verfahren durch. Verwenden Sie dazu die Schrittweite  $t_0 = 1$  und den Startwert  $[x_0, y_0] = [-1, 2]$ .



c) Führen Sie für das gleiche Problem einen Schritt des Newton-Verfahrens durch. Wählen Sie als Startwert erneut  $[x_0, y_0] = [-1, 2]$ . **Hinweis:** Gesucht ist das Minimum von  $F$ , nicht die Nullstellen.

