Prof. Dr. Günther Greiner
Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung
der Universität Erlangen–Nürnberg

1. August 2013

Algorithmik kontinuierlicher Systeme — 1. August 2013

Angaben zur Person (Bitte in DRUCKSCHRIFT ausfüllen!):

Name, Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Studienfach: ....

Nicht von der Kandidatin bzw. vom Kandidaten auszufüllen !

Bewertung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Max. Punktzahl	7	7	10	11	9	14	6	8	18
Erreichte Punkte									

Gesamtpunktzahl	
Note	

Organisatorische Hinweise

Die folgenden Hinweise bitte aufmerksam lesen und die Kenntnisnahme durch Unterschrift bestätigen!

- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Personenkontrolle bereit.
- Hilfsmittel (außer Schreibmaterial **und** Taschenrechner) sind nicht zugelassen. Andere elektronische Geräte sind auszuschalten.
- Fragen zu den Prüfungsaufgaben werden grundsätzlich nicht beantwortet.
- Die Lösung einer Aufgabe muss auf das jeweilige Aufgabenblatt geschrieben werden. Sollte der Platz nicht reichen, so verwenden Sie die Zusatz-Seiten am Ende der Klausur. Fügen Sie einen Hinweis in Ihre Lösung ein, dass die Lösung auf den Zusatz-Seiten fortgesetzt wurde und beschriften Sie diese mit Namen und Aufgabennummer.
- Es können durch die Aufsicht zusätzlich Seiten eingeheftet werden, sollte mehr Platz benötigt werden. Bitte beschriften Sie den Kopf dieser Seiten mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer. Streichen Sie alles, was nicht bewertet werden soll doppelt aus.
- Auf Ihrem Platz befinden sich einige lose Blätter Schmierpapier. Bei Bedarf können Sie zusätzliches Schmierpapier von der Aufsicht anfordern. Das Schmierpapier muss abgegeben werden, es wird aber nicht bewertet.
- Wenn Sie die Prüfung aus gesundheitlichen Gründen abbrechen müssen, so muss Ihre Prüfungsunfähigkeit durch eine Untersuchung in der Universitätsklinik nachgewiesen werden. Melden Sie sich bei der Aufsicht und lassen Sie sich das entsprechende Formular aushändigen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Überprüfen Sie die Prüfungsaufgaben auf Vollständigkeit (26 Seiten inklusive Deckblatt) und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, auf dem Deckblatt die Angaben zur Person einzutragen und die **Erklärungen auf dieser Seite zu unterschreiben**.
- Viel Erfolg!

Erklärungen

Durch meine Unterschrift bestätige ich den Empfang der vollständigen Klausurunterlagen und die Kenntnisnahme der obigen Informationen.

Erlangen, 1. August 2013 ....

(Unterschrift)

Ich bin damit einverstanden, dass mein Prüfungsergebnis unter Angabe der Matrikelnummer anonymisiert veröffentlicht wird:

ja: ☐ nein: ☐

Erlangen, 1. August 2013 ....

(Unterschrift)

1 Theoriefragen und Gleitpunktzahlen (7 Punkte)

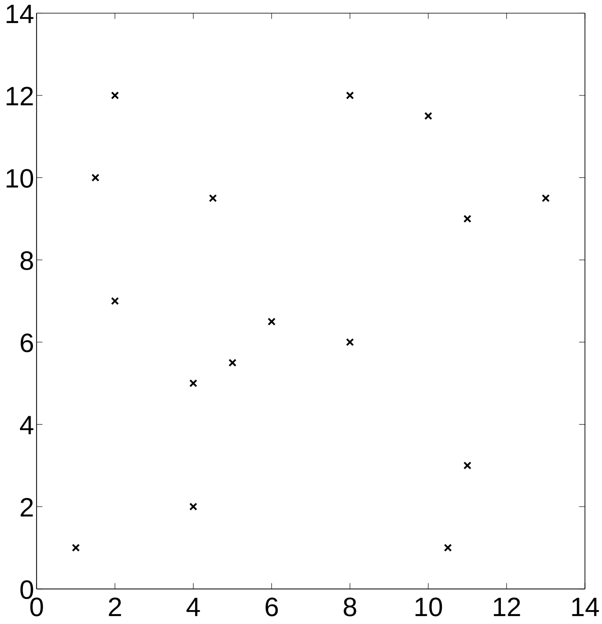
a) Beantworten Sie die folgenden Fragen! Schreiben Sie ihre Antwort in die rechte Spalte der Tabelle!

Welche Komplexität hat die Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathbf{A}\vec{b}$ wobei $\mathbf{A}$ eine $(n \times n)$-Matrix und $\vec{b}$ ein n-Vektor ist?	O( )
Welche Komplexität hat die Bestimmung der LR-Zerlegung einer tridiagonalen $(n \times n)$-Matrix?	O( )
Welche Komplexität hat das Lösen eines Linearen Gleichungssystems, wenn die QR-Zerlegung bekannt ist?	O( )
Welche Komplexität hat die Bestimmung der diskreten FOURIER-Transformation eines n-Vektors bei Verwendung der FFT?	O( )
Welchen Grad hat eine BÉZIER Kurve, die durch 5 Kontrollpunkte definiert ist?	
Wieviele Multiplikationen benötigt das Filtern eines $(m \times m)$ großen Bildes mit einem $(n \times n)$ großen Filter, wenn das Filter separierbar ist? (Die Bestimmung der Randpixel soll vernachlässigt werden)	
Was ist die Konvergenzordnung des NEWTON-Verfahrens zur Bestimmung einer einfachen Nullstelle?	
Wie groß ist der Approximationsfehler des stückweise linearen Interpolanten im Falle äquidistanter Schrittweite h ?	O( )

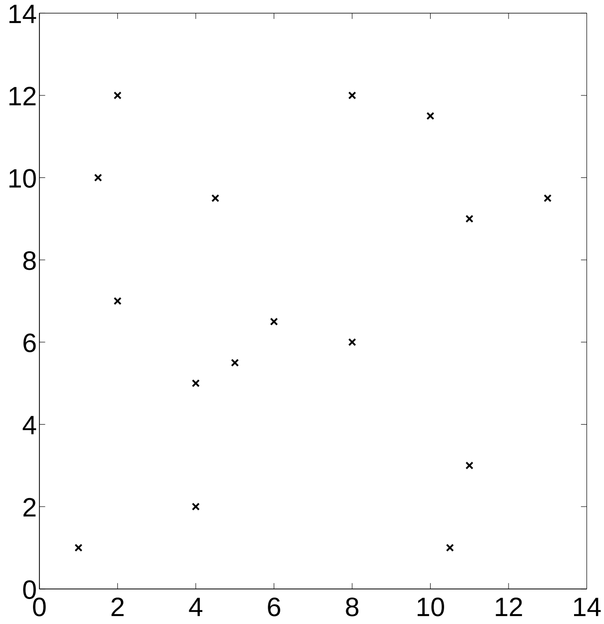
b) Betrachten Sie $\mathcal{F}_{2,3}$, die Menge der Gleitpunktzahlen zur Basis $B = 2$ mit Mantissenlänge $t = 3$. Markieren Sie in der Abbildung (jeweils durch ein Kreuz) **alle** $a \in \mathcal{F}_{2,3}$ mit $1 \leq a \leq 8$.

2 Median Cut (7 Punkte)

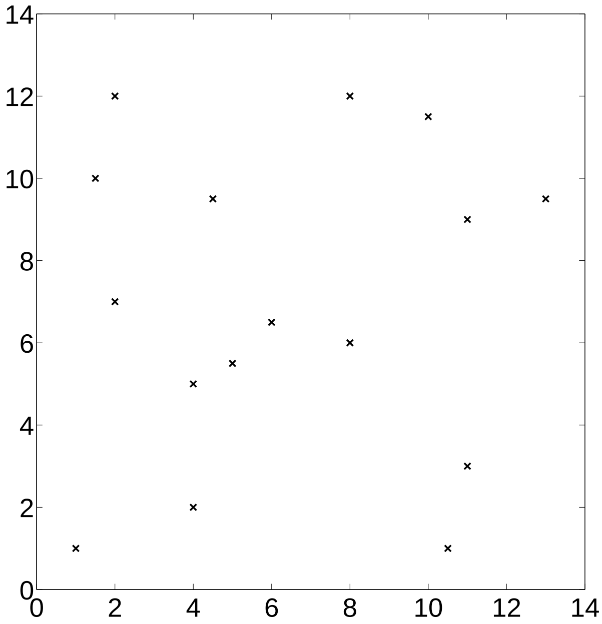
Gegeben ist folgende Punktewolke mit 16 Punkten:



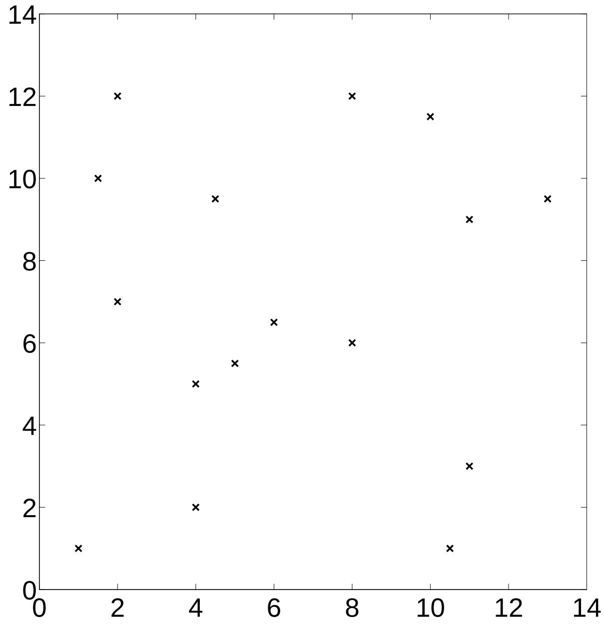
Gegebene Punktewolke



Schritt 1



Schritt 2



Schritt 3

a) Führen Sie 3 Schritte des **Median-Cut** Verfahrens durch!
Hinweis: Benutzen Sie dazu die obigen Vorlagen!

b) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, die Repräsentanten der endgültigen **Bounding-Boxes** zu bestimmen!

3 LR- und QR-Zerlegung (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der folgenden Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Die QR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ ist bekannt:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie unter Verwendung der QR-Zerlegung von **B** die Lösung der linearen Gleichung

$$\mathbf{B}\vec{x} = \vec{b} \quad \text{für} \quad \vec{b} = [-2\,,\ 10\,,\ -2\,]^T \ .$$

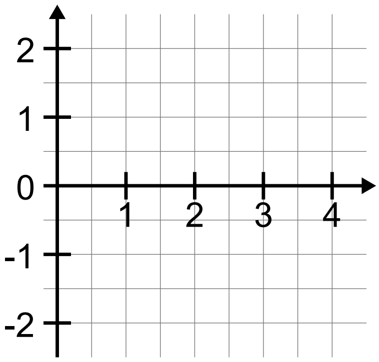
c) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

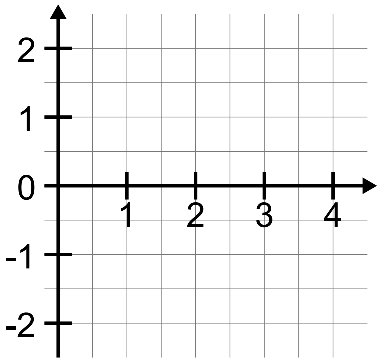
4 Interpolation (11 Punkte)

Gegeben seien folgende Punkte:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
y_i	2	1	-1	1



(a) nearest neighbor



(b) linear

a) Berechnen Sie die Funktion $n(x) : [0, 4] \mapsto \mathbb{R}$, welche obige Werte, gemäß Nearest Neighbor Interpolation, stückweise konstant interpoliert **und** zeichnen Sie die Funktion in das obige Schaubild ein!

b) Berechnen Sie die Funktion $l(x) : [0, 4] \mapsto \mathbb{R}$, welche obige Werte stückweise linear interpoliert **und** zeichnen Sie die Funktion!

Zur Erinnerung:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
y_i	2	1	-1	1

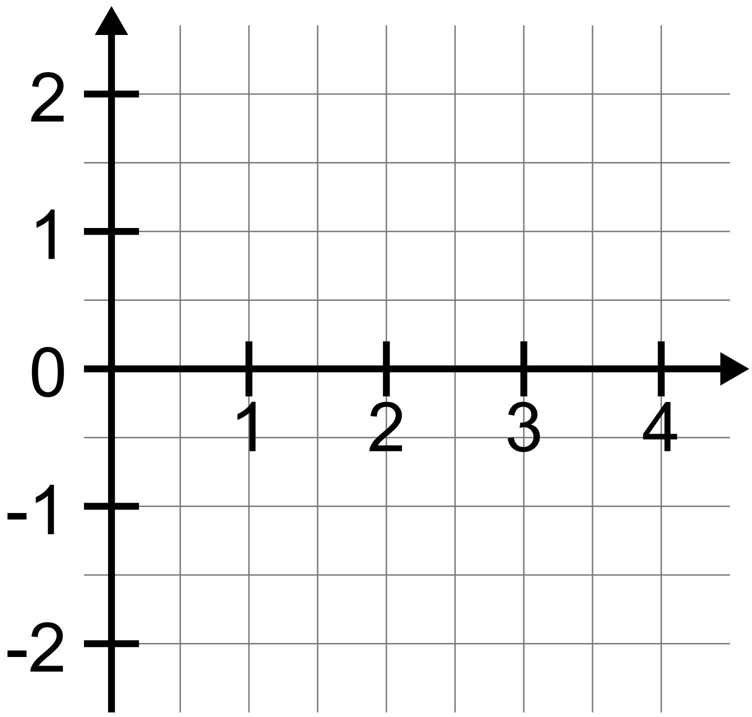
c) Bestimmen Sie das interpolierende Polynom $a(x)$ mit dem Schema von AITKEN-NEVILLE **und** geben Sie $a(x)$ in der NEWTON-Basis an!

Zur Erinnerung:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
y_i	2	1	-1	1

d) Geben Sie die Ableitungen m_1 und m_2 für den Catmull-Rom-Interpolanten an den Stellen x_1 und x_2 an.

e) Skizzieren Sie im Interval $[x_1, x_2]$ den Catmull-Rom-Interpolanten.



5 Multivariate Interpolation (9 Punkte)

5.1 Baryzentrische Koordinaten

Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks $\Delta(\vec{R}, \vec{S}, \vec{T})$: $\vec{R} = [3,0]^T$, $\vec{S} = [3,6]^T$, $\vec{T} = [0,3]^T$.
Die Zuordnung der baryzentrischen Koordinaten zu den Eckpunkten ist folgendermaßen:

- $\rho \leftrightarrow \vec{R}$; $\sigma \leftrightarrow \vec{S}$; $\tau \leftrightarrow \vec{T}$;

a) Berechnen Sie die zu den baryzentrischen Koordinaten ρ_i, σ_i und τ_i gehörenden Punkte $\vec{P_i}$!

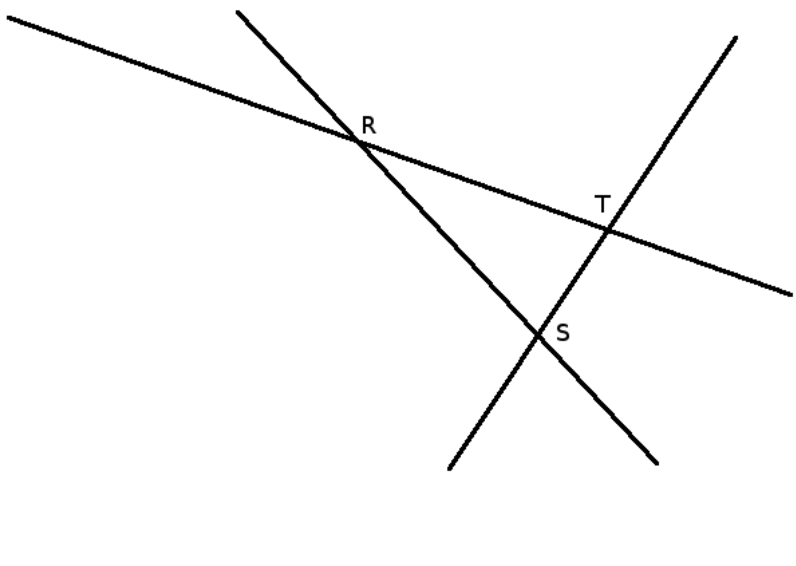
i	ρ_i	σ_i	τ_i
0	0	0	1
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

b) Die Funktionswerte an den Eckpunkten $\vec{R}$, $\vec{S}$ und $\vec{T}$ seien $f_R = 3$, $f_S = 6$ und $f_T = 4$. Berechnen Sie die interpolierten Funktionswerte an den in a) bestimmten Punkten!

Zur Erinnerung: $\vec{R} = [3,0]^T$, $\vec{S} = [3,6]^T$, $\vec{T} = [0,3]^T$.

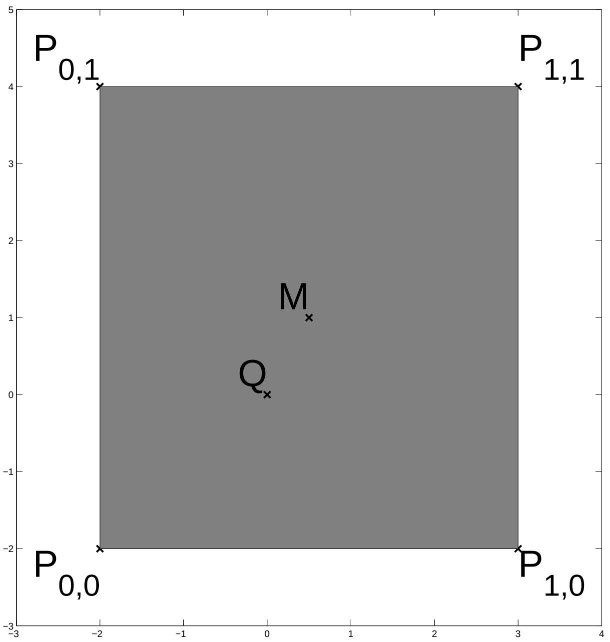
c) Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten $[\rho_1, \sigma_1, \tau_1]^T$ des Punktes $\vec{Q}_1 = [2,2]$ bzgl. des Dreiecks $\Delta(\vec{R}, \vec{S}, \vec{T})$!

d) Markieren Sie in der gegebenen Zeichnung die Gerade $\tau = 1$, sowie die Menge der Punkte, für deren baryzentrische Koordinaten gilt: $\sigma \leq 0$ und $\tau \geq 1$!



5.2 Bilineare Interpolation

e) In den Ecken eines Rechtecks $P_{0,0} = [-2,-2]$, $P_{1,0} = [3,-2]$, $P_{1,1} = [3,4]$, $P_{0,1} = [-2,4]$ sind vier Werte f_{00}, f_{10}, f_{11} und f_{01} gegeben, diese sollen bilinear interpoliert werden:



Die Werte des bilinearen Interpolanten in einem Punkt P kann man als gewichtete Summe schreiben:
$f_P = w_{00}^P f_{00} + w_{10}^P f_{10} + w_{11}^P f_{11} + w_{01}^P f_{01}$

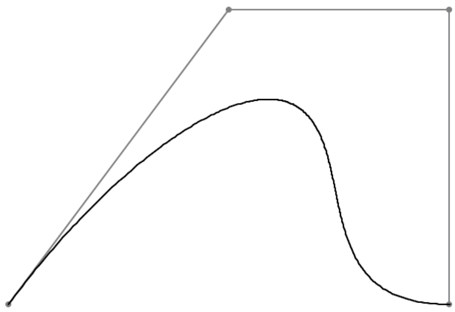
Bestimmen Sie die Gewichte für den Mittelpunkt des Rechtecks $M = [0.5, 1]$ und den Punkt $Q = [0, 0]$!

$M: \quad w_{00}^M = \qquad , w_{10}^M = \qquad , w_{11}^W = \qquad , w_{01}^M = \qquad ;$

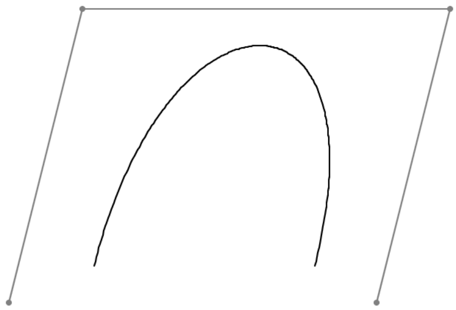
$Q: \quad w_{00}^Q = \qquad , w_{10}^Q = \qquad , w_{11}^Q = \qquad , w_{01}^Q = \qquad ;$

6 Bézier Kurven (14 Punkte)

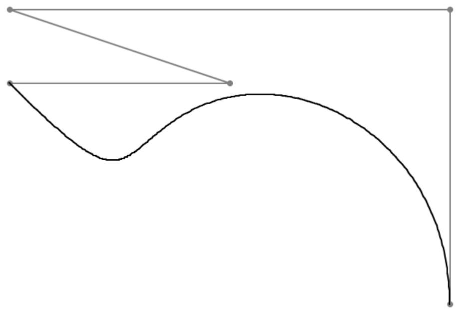
Gegeben sind die Kontrollpolygonzüge von drei Bézier Kurven. Leider wurde bei der Auswertungsmethode fehlerhafter Code programmiert und die folgenden „Bézier Kurven“ erzeugt:



I.)



II.)

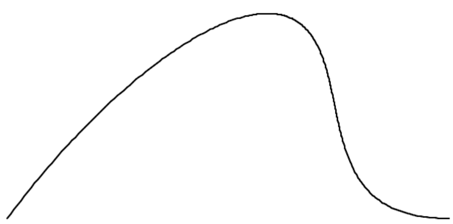


III.)

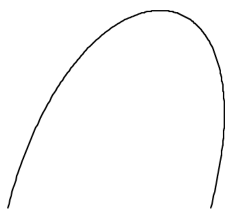
a) Geben Sie für jede Kurve an, welche Formeigenschaften von Bézier Kurven verletzt sind!

Verletzte Formeigenschaften in I.):	Verletzte Formeigenschaften in II.):	Verletzte Formeigenschaften in III.):

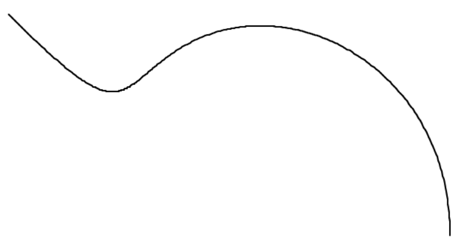
b) Zeichnen Sie korrekte Kontrollpolygonzüge zu den gegebenen Bézier Kurven (mit jeweils minimaler Anzahl an Kontrollpunkten)!



I.)

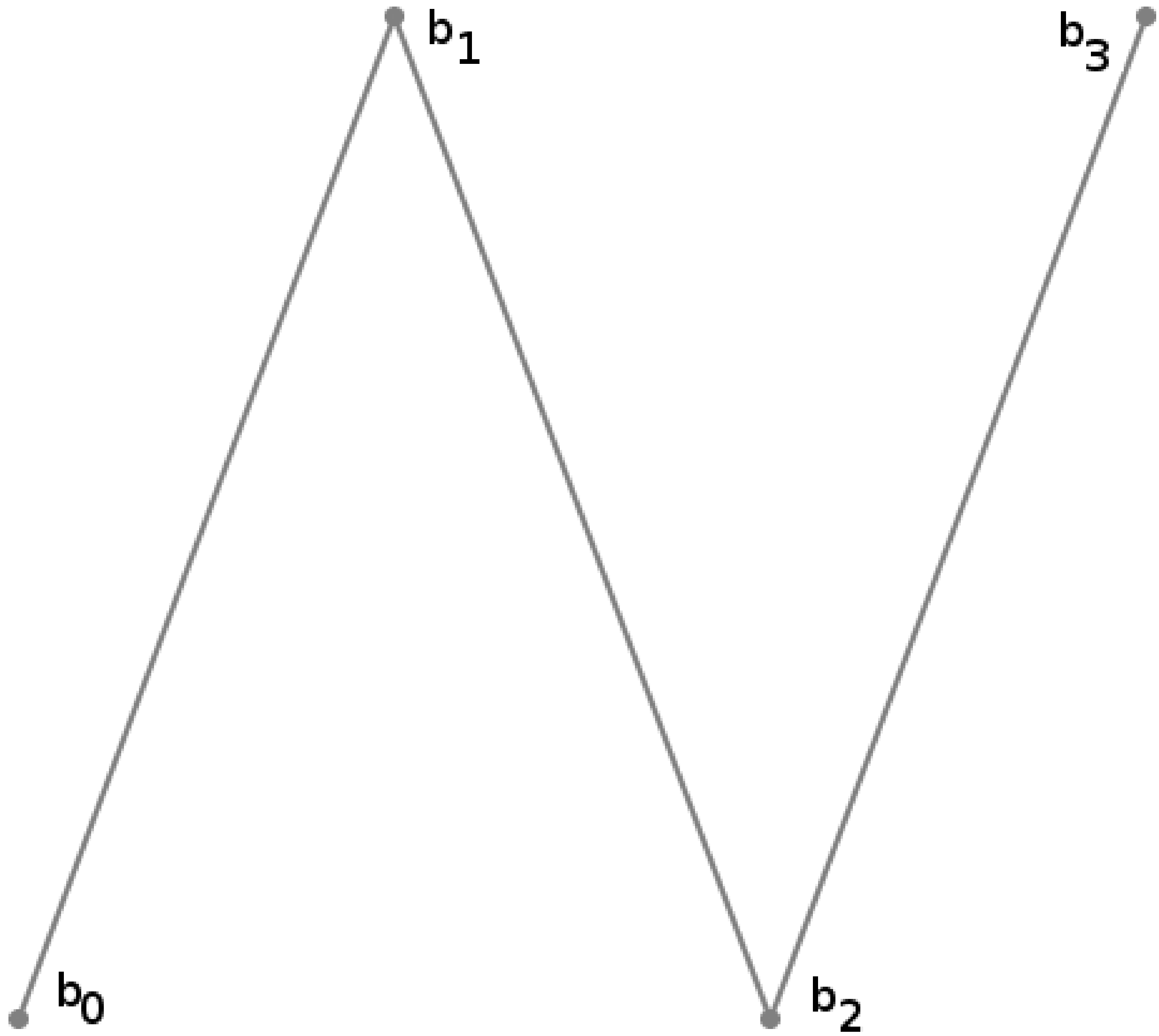


II.)



III.)

c) Gegeben ist das Kontrollpolygon für eine BÉZIER Kurve. Werten Sie graphisch den Algorithmus von DECASTELJAU an der Stelle $u = \frac{3}{4}$ aus. Kennzeichnen Sie den Kurvenpunkt $F(\frac{3}{4})$ deutlich!



d) Implementieren Sie die Methode `vec3 deCasteljau(const std::vector<vec3>& kp, float u)` in C++, die zu einem gegebenen Satz dreidimensionaler Kontrollpunkte (`kp`) und Parameter (`u`) den Algorithmus von DeCasteljau an der Stelle u auswertet und zurückliefert.
Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass für Objekte der Klasse `vec3` alle Standardoperatoren (+, -, *, /, =, ==) zur Verfügung stehen.

```
vec3 deCasteljau(const std::vector<vec3>& kp, float u) {









   return          ;
}
```

7 Jacobi, Gauss-Seidel (6 Punkte)

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ mit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Dieses Gleichungssystem soll iterativ gelöst werden, beginnend mit dem Startvektor $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

a) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens (zum Startwert $\vec{x}^0$) durch.

b) Führen Sie einen Schritt des Gauss-Seidel-Verfahrens (zum Startwert $\vec{x}^0$) durch.

c) Konvergiert das JACOBI-Verfahren für die folgenden Matrizen?

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Begründen Sie Ihre Aussagen stichpunktartig!

8 Integration (8 Punkte)

Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{x^4}{2}$.

a) Berechnen Sie den Näherungswert für $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$ mit der iterierten **Trapez-Regel**. Hierfür wird das Integrationsintervall $[-1, 3]$ in zwei gleich große Teilintervalle zerlegt.

Hinweis:

x	-1	1	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{81}{2}$

b) Berechnen Sie den Näherungswert für $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$ mit der iterierten SIMPSON-**Regel**. Wiederum wird das Integrationsintervall $[-1, 3]$ in zwei gleich große Teilintervalle zerlegt.

Hinweis:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	8	$\frac{81}{2}$

c) Der exakte Wert des Integrals ist $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = \frac{122}{5}$.
Bestimmen Sie die relativen Fehler der in Teil a) und b) ermittelten Näherungswerte.

d) Die iterierte **Trapez-Regel** für die Schrittweiten $h = 1$ bzw. $h = 0.5$ ergibt die folgenden Werte:

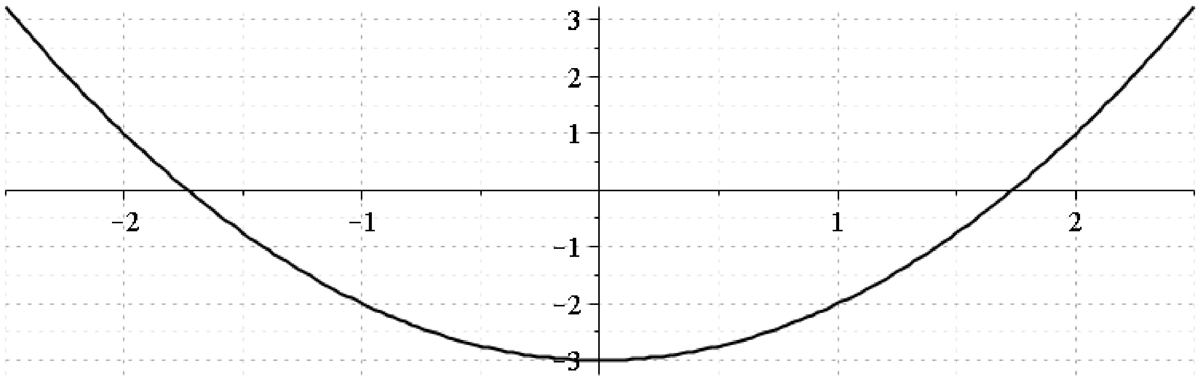
$h = 1.0: \quad T(1.0) = 29.0$

$h = 0.5: \quad T(0.5) = \frac{409}{16} = 25.5625$

Verbessern Sie diesen Näherungswert, indem Sie einen Schritt des Romberg-**Verfahrens** ausführen.

9 Nullstellensuche (18 Punkte)

a) Im Folgenden soll mittels Sekantenverfahren eine Nullstelle der unten eingezeichneten Parabel ermittelt werden. Gegeben sind dabei die Startwerte $x_0 = 1.5$ sowie $x_1 = -2$. Führen Sie **zeichnerisch** zwei Schritte des Sekantenverfahrens durch. Ermitteln Sie also zeichnerisch x_2 und x_3. Achten Sie darauf, dass die Zwischenschritte erkennbar sind.



Für die nachfolgenden Teilaufgaben ist folgendes Programmgerüst gegeben:

```
#include <cstdlib>
#include <iostream>

// Funktion f an der Stelle x
float f(float x) {
   return cos(x) - x;
}

// Ableitung der Funtion f an der Stelle x
float df(float x) {
   return - sin(x) - 1.0f;
}

class RootFinders {
public:
   // Newton-Verfahren
   static float newton(float x0, int maxIterations, float epsilon);
   // Sekanten-Verfahren
   static float secant(float x0, float x1, int maxIterations, float epsilon);
};

int main() {
   std::cout << RootFinders::newton(3.0f, 10, 0.0000001f) << std::endl;
   std::cout << RootFinders::secant(0.1f, 2.0f, 10, 0.0000001f) << std::endl;
   return EXIT_SUCCESS;
}
```

b) Implementieren Sie die Methode `newton`, welche mittels des Newton-Verfahrens eine Nullstelle der Funktion `f` bestimmt. Die Ableitung der Funktion an der Stelle x ist als `df(x)` geben.

Als Startwert für das Newton-Verfahren soll der Parameter `x0` verwendet werden.

Das numerische Auswerten der Nullstelle soll spätestens nach `maxIterations` beendet werden. Ist die Änderung der Näherung für die Nullstelle kleiner als `epsilon` soll das iterative Bestimmen der Nullstelle beendet und die aktuelle Näherungslösung zurückgegeben werden.

Der Rückgabewert der Funktion ist die numerisch bestimmte Näherung der Nullstelle.

```
float RootFinders::newton(float x0, int maxIterations, float epsilon) {

}
```

c) Implementieren Sie die Methode `secant`, welche mittels des Sekanten-Verfahrens eine Nullstelle der Funktion `f` bestimmt. Als Startwerte für das Sekanten-Verfahren sollen die Parameter `x0` und `x1` verwendet werden.

   Das numerische Auswerten der Nullstelle soll spätestens nach `maxIterations` beendet werden. Ist die Änderung der Näherung für die Nullstelle kleiner als `epsilon` soll das iterative Bestimmen der Nullstelle beendet und die aktuelle Näherungslösung zurückgegeben werden.

   Der Rückgabewert der Funktion ist die numerisch bestimmte Näherung der Nullstelle.

```
float RootFinders::secant(float x0, float x1, int maxIterations, float epsilon) {

}
```